



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x + y + z + w = 8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Πρόβλημα 3

Αν ο τετρανήφιος ακέραιος $A = \overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το O προς την $A\Gamma$ τέμνει την AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1) , του τριγώνου $A\Delta O$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Z . Έστω ότι η ΔZ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

- (α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
- (β) Τα τρίγωνα OZE και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
- (γ) Τα σημεία Γ, O, H είναι συνευθειακά.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες