Λήμμα 1

Για τη συνάρτηση $q:\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ με:

$$q(x,y,z) = \begin{cases} 0\ ,\quad \text{αν } y \geq 10z \\ \text{το } x\text{-οστό ψηφίο του δεκαδικού αναπτύγματος του} \\ \text{αριθμού } \dfrac{y}{z}\ ,\quad \text{αν } y < 10z \end{cases}$$

(δηλ. η q είναι η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει:

αν $y \geq 10z$, τότε $(\forall x \in \mathbb{N})[q(x,y,z)=0]$,

αν $y < 10z$, τότε $\dfrac{y}{z} = \sum_{x=0}^{\infty}(q(x,y,z)\cdot 10^{-x})$)

ισχύει: $q \in \mathrm{R}_p$.

<u>Απόδειξη</u>:

Εφαρμόζω τη στοιχειώδη μέθοδο διαίρεσης φυσικών (που μάθαμε όλοι στο Δημοτικό!) και ορίζω τη συνάρτηση $r:\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ έτσι ώστε $r(x,y,z)$ να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\dfrac{y}{z}$ στο x-οστό βήμα της μεθόδου αυτής. Δηλ.

$r(0,y,z) = \chi_<(y,10z)\cdot rm(y,z)$ (1)

$r(x+1,y,z) = \chi_<(y,10z)\cdot rm(10\cdot r(x,y,z),z)$ (2) και τότε

$q(0,y,z) = \chi_<(y,10z)\cdot quot(y,z)$ (3)

$q(x+1,y,z) = \chi_<(y,10z)\cdot quot(10\cdot r(x,y,z),z)$ (4)

- Αν $y \geq 10z$, τότε από (1) έως (4) έπεται:

  $(\forall x \in \mathbb{N})[q(x,y,z)=0]$
- Αν $y < 10z$, τότε θα δείξω με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

  $$y = z(\sum_{x=0}^{n} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + r(n,y,z)\cdot 10^{-n}$$

  <u>Επ.Βάση</u>:

  Για $n=0$. Πρέπει να δείξω:

  $y = z\cdot q(0,y,z)\cdot 10^{-0} + r(0,y,z)\cdot 10^{-0} \Leftrightarrow$

  $y = z\cdot q(0,y,z) + r(0,y,z) \Leftrightarrow$ από (1) και (3)

  $y = z\cdot quot(y,z) + rm(y,z)$. Ισχύει.

  <u>Επ.Υπόθεση</u>:

  $$y = z(\sum_{x=0}^{n} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + r(n,y,z)\cdot 10^{-n}$$

  <u>Επ.Βήμα</u>:

  Πρέπει να δείξω:

  $$y = z(\sum_{x=0}^{n+1} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + r(n+1,y,z)\cdot 10^{-(n+1)} \Leftrightarrow$$

  $$y = z(\sum_{x=0}^{n} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + z\cdot q(n+1,y,z)\cdot 10^{-(n+1)} + r(n+1,y,z)\cdot 10^{-(n+1)} \Leftrightarrow$$

  $$y = z(\sum_{x=0}^{n} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + 10^{-n}\cdot(z\cdot q(n+1,y,z)\cdot 10^{-1} + r(n+1,y,z)\cdot 10^{-1}) \qquad (5)$$

  Όμως, από (2) και (4) ισχύει:

  $10\cdot r(n,y,z) = z\cdot q(n+1,y,z) + r(n+1,y,z) \Leftrightarrow$

  $r(n,y,z) = z\cdot q(n+1,y,z)\cdot 10^{-1} + r(n+1,y,z)\cdot 10^{-1}$. Άρα η (5) γίνεται:

$$y = z(\sum_{x=0}^{n} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + r(n,y,z)\cdot 10^{-n}.$$ Ισχύει, λόγω επ.υπόθεσης.

□ (επαγωγής)

Τώρα ισχύει προφανώς:

$$y = z(\sum_{x=0}^{\infty} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}) + \lim_{n\to\infty}(r(n,y,z)\cdot 10^{-n}) \qquad (6)$$

Λόγω των (1) και (2) προκύπτει αμέσως ότι:

$0 \le r(n,y,z) < z, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα:

$\lim_{n\to\infty}(r(n,y,z)\cdot 10^{-n}) = 0$. Κι έτσι η (6) γίνεται:

$$\frac{y}{z} = \sum_{x=0}^{\infty} q(x,y,z)\cdot 10^{-x}$$

Άρα η q, όπως ορίσθηκε με πρωτογενή αναδρομή στις (3) και (4) (χρησιμοποιώντας την r), είναι η ζητούμενη.

Επειδή δε, στον πρωτογενώς αναδρομικό ορισμό των r,q χρησιμοποιούνται πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις και σχέσεις, λόγω της κλειστότητας του R_p για πρωτογενή αναδρομή, θα είναι πρωτογενώς αναδρομικές και οι r,q. Άρα:

$q \in \mathrm{R}_p$

□

Λήμμα 2

Έστω $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με:

$$f(x) = \prod_{i=0}^{x} g(i), \ \forall x \in \mathbb{N}.$$

Αν $g \in \mathrm{R}_p$, τότε $f \in \mathrm{R}_p$.

Απόδειξη:

Η f μπορεί να οριστεί με πρωτογενή αναδρομή ως εξής:

$f(0) = g(0)$

$f(x+1) = f(x)\cdot g(x+1) =$

$= h(f(x),x)$

όπου $h(w,x) = w\cdot g(x+1)$

Αν $g \in \mathrm{R}_p$, τότε $h \in \mathrm{R}_p$, άρα:

$f \in \mathrm{R}_p$

□

Πρόταση 1

Έστω η συνάρτηση $pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, για την οποία ισχύει:

$pi(x) =$ το $x-$οστό δεκαδικό ψηφίο του π.

(Δηλ. $pi(0)=3, pi(1)=1, pi(2)=4,\dots$)

Ισχύει: $pi \in \mathrm{R}_p$.

Απόδειξη:

Ο τύπος του Wallis[1] δίνει για τον υπολογισμό του π:

$$\pi = 2\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)}$$ ή

[1] Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers.* Middlesex, England: Penguin Books, 1986. (σελ. 50)

$$\pi = \frac{2\prod_{i=0}^{\infty} 4(i+1)^2}{\prod_{i=0}^{\infty}((2i+1)(2i+3))} \qquad (1)$$

Ο υπολογισμός που βασίζεται στον τύπο αυτόν συγκλίνει πολύ αργά στο π.
Αν όμως υπολογιστούν 10^n όροι, τότε (όπως φαίνεται στη θεωρία, στην οποία βασίζεται ο τύπος αυτός), τότε θα έχουν υπολογιστεί **σίγουρα** n «σωστά» ψηφία του π (τα οποία δηλ. δεν πρόκειται να αλλάξουν με τον υπολογισμό περισσότερων όρων) . Στην πραγματικότητα απαιτούνται λιγότεροι από 10^n όροι, αλλά με τόσους είμαστε σίγουροι για την ακρίβεια των n ψηφίων! (2)

Έστω τώρα η συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με:

$$f(x) = \frac{2\prod_{i=0}^{x} 4(i+1)^2}{\prod_{i=0}^{x}((2i+1)(2i+3))}, \ \forall x \in \mathbb{N}$$

Τότε ισχύει $\forall x \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{4(x+2)^2}{(2x+3)(2x+5)} = \frac{4x^2+16x+16}{4x^2+16x+15} > 1. \quad \text{Άρα:}$$

$$f(x) < f(x+1) \qquad (3)$$

Όμως, λόγω (1), ισχύει:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi < 10$. Άρα, λόγω (3), ισχύει:

$f(x) < 10$, $\forall x \in \mathbb{N}$ δηλ.

$$2\prod_{i=0}^{x} 4(i+1)^2 < 10\prod_{i=0}^{x}((2i+1)(2i+3)), \ \forall x \in \mathbb{N} \qquad (4)$$

Έστω τώρα συναρτήσεις $f_1, f_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με:

$$f_1(x) = 2\prod_{i=0}^{x} 4(i+1)^2, \ \forall x \in \mathbb{N} \qquad (5) \quad \text{και}$$

$$f_2(x) = \prod_{i=0}^{x}((2i+1)(2i+3)), \ \forall x \in \mathbb{N} \qquad (6)$$

Τότε, λόγω (4) ισχύει:

$f_1(x) < 10 f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$

Κι έτσι, λόγω Λήμματος 1, ισχύει:

$q(x, f_1(10^x), f_2(10^x)) =$ το x-οστό ψηφίο του δεκαδικού αναπτύγματος του αριθμού $\frac{f_1(10^x)}{f_2(10^x)}$

Όμως, λόγω (1), (2), (5) και (6), ο αριθμός $\frac{f_1(10^x)}{f_2(10^x)}$ συμπίπτει με το π τουλάχιστον στα x πρώτα δεκαδικά ψηφία του. Άρα, το x-οστό ψηφίο του δεκαδικού αναπτύγματος του $\frac{f_1(10^x)}{f_2(10^x)}$ συμπίπτει με το x-οστό ψηφίο του π. Άρα:

$q(x, f_1(10^x), f_2(10^x)) =$ το x-οστό ψηφίο του δεκαδικού αναπτύγματος του π

δηλ.

$$pi(x) = q(x, f_1(10^x), f_2(10^x))$$

Επειδή όμως οι συναρτήσεις $g_1(x) = 4(x+1)^2$ και $g_2(x) = (2x+1)(2x+3)$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές, λόγω του Λήμματος 2, θα είναι και οι f_1, f_2.

Επιπροσθέτως δε, επειδή η συνάρτηση $g_3(x) = 10^x$ είναι πρωτογενώς αναδρομική καθώς και η q (λόγω Λήμματος (1)), θα ισχύει:

$$pi \in \mathrm{R}_p$$

□