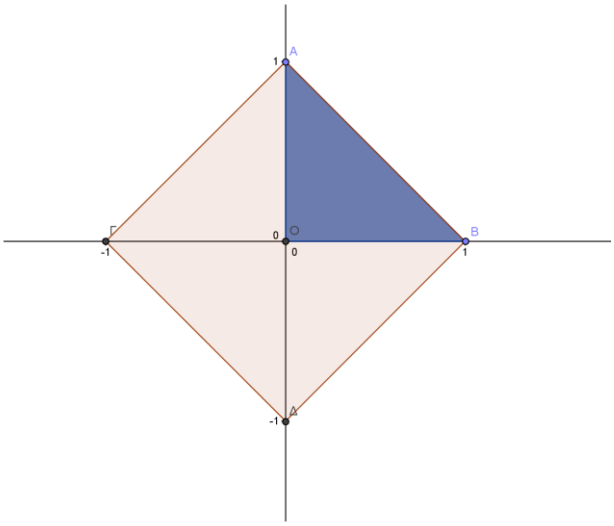
Λύσεις ασκήσεων

<u>Άσκηση 7</u> Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου του οποίου οι διαγώνιες βρίσκονται πάνω στους άξονες και η πλευρά του έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$

Λύση:

Οι διαγώνιες σχηματίζουν με την πλευρά ορθογώνιο τρίγωνο και αφού η υποτείνουσα είναι $\sqrt{2}$ **τότε οι κάθετες είναι 1**



Έτσι από το σχήμα είναι Α(0,1), Β(1,0), Γ(-1,0), Δ(0,-1)

οπότε ΑΒ: y=-x+1, ΑΓ: y=x+1, ΓΔ: y=-x-1 ,

ΒΔ: y=x-1

<u>Άσκηση 8</u> Τα σημεία Α(2,0) και Β(-1,4) είναι διαδοχικές κορυφές τετραγώνου. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του και οι άλλες του κορυφές.

Λύση:

λ_{AB}=-4/3, ΑΒ: y=-4 x /3+8/3

$\lambda_{ΓB}$=3/4, ΓΒ: y=3x/4 +19/4

$\lambda_{AΔ}$=3/4, ΑΔ: y=3x/4 -3/2

Εύρεση Δ

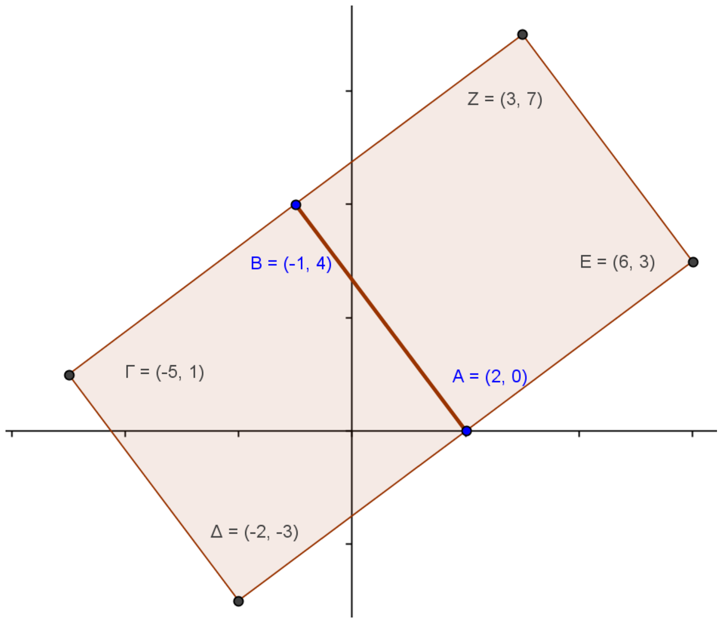
Έστω Δ(α,β),

$$\lambda_{ΑΔ} = \lambda_{ΒΓ} \Leftrightarrow \frac{\beta - 0}{\alpha - 2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{3\alpha}{4} - \frac{6}{4}$$

ΑΔ=ΑΒ $\Leftrightarrow$ $(\alpha-2)^2+(\beta-0)^2 = (-1-2)^2+(4-0)^2$

$\Leftrightarrow$ $(\alpha-2)^2+\beta^2 = 25$ $\Leftrightarrow$

$(\alpha-2)^2+\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{6}{4}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow$ α=-2 ή



α=6, οπότε β=-3 ή β=3.Επομένως

υπάρχουν δύο σημεία το Δ(-2,-3) και το Ε(6,3)

Με γνωστά τα Α,Β,Δ το Γ βρίσκεται σαν λύση του συστήματος των

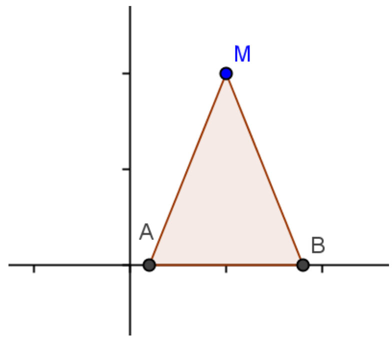
ΓΒ: y=3x/4 +19/4 και ΔΓ: y=-4x/3 -17/3, οπότε Γ(-5,1)

Με γνωστά τα Α,Β,Ε το Ζ βρίσκεται σαν λύση του συστήματος των

ΖΒ: y=3x/4 +19/4 και ΕΖ: y=-4x/3 +11, οπότε Ζ(3,7)

<u>Άσκηση 9</u> Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Μ(1,2) και σχηματίζουν με τον xx΄ α) ισοσκελές τρίγωνο β) ισοσκελές τρίγωνο με βάση 7

Λύση



α) Έστω Α(α,0) και Β(β,0) με α≠1 και β≠1 και α≠β

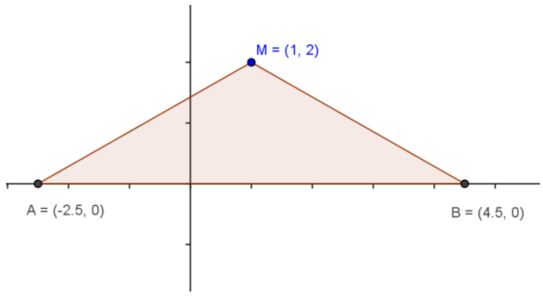
(αλλιώς δεν σχηματίζεται τρίγωνο)

τότε ΑΜ=ΜΒ $\Leftrightarrow$ $(\alpha-1)^2+(0-2)^2 = (\beta-1)^2+(0-2)^2$

$\Leftrightarrow$ $(\alpha-1)^2=(\beta-1)^2$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha-1)=(\beta-1)$ $\Leftrightarrow$

α=β άτοπο (δεν σχηματίζεται τρίγωνο)

ή $(\alpha-1)=-(\beta-1)$ $\Leftrightarrow$ α=-β+2



Άρα η ΑΜ: $y-2=\lambda_{AM}(x-1)$ με $\lambda_{AM} = \dfrac{0-2}{a-1} = \dfrac{-2}{-\beta+1}$

και η ΒΜ: $y-2=\lambda_{BM}(x-1)$ με $\lambda_{BM}=\dfrac{-2}{\beta-1}$

Άρα υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από το σημείο Μ(1,2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο

β) Επιπλέον έχουμε ΑΒ=7 $\Leftrightarrow$ $(\alpha-\beta)^2=7^2$ $\Leftrightarrow$ $|\alpha-\beta|=7$ $\Leftrightarrow$ -α+β=7

(υποθέτουμε ότι α<β, δηλ το Α είναι πιο αριστερά από το Β)

Οπότε β=4,5 και α=-2,5

Άρα υπάρχουν δύο ευθείες που διέρχονται από το σημείο Μ(1,2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο οι ΑΜ: $y-2=\dfrac{4}{7}(x-1)$ και $y-2=-\dfrac{4}{7}(x-1)$

Παρατήρηση: Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε την περίπτωση οι ζητούμενες να είναι μορφής x=xo , αφού τότε δεν σχηματίζεται τρίγωνο

<u>Άσκηση 11</u> **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Μ(0,1) και τέμνει τις ευθείες ε_1: $y=\frac{1}{2}x$ και ε_2: $y=\frac{1}{2}x+1$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως , έτσι ώστε να ισχύει ΑΒ=1**

Λύση:

Εξετάζουμε την περίπτωση η ζητούμενη να είναι μορφής $x=x_o \Leftrightarrow x=0$

τότε αυτή τέμνει τις ε_1 , ε_2 στα Α(0,0), Β(0,1) και είναι ΑΒ=1 , άρα μία λύση είναι η x=0 (yy')

έστω η ζητούμενη y-1=λ(x-0) τότε αυτή τέμνει τις ε_1 , ε_2 στα Α,Β

$$A\left(\frac{2}{1-2\lambda},\frac{1}{1-2\lambda}\right) \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \quad \begin{matrix} y=\frac{1}{2}x \\ y-1=\lambda x \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=\frac{1}{1-2\lambda} \\ x=\frac{2}{1-2\lambda} \end{matrix}, \lambda \neq \frac{1}{2}, \quad B(0,1) \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \quad \begin{matrix} y=\frac{1}{2}x+1 \\ y-1=\lambda x \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=1 \\ x=0 \end{matrix}, \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Αν λ=1/2 τότε η ζητούμενη δεν τέμνει τις ε_1 , ε_2 (παράλληλες)

$AB=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{1-2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1-2\lambda}-1\right)^2=1$ τότε λ=-3/4 άρα η ζητούμενη είναι η y-1=-3x /4