ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ :3

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας **Σωστό** ή **Λάθος**

α) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

β) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος μέσω μιας συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.

γ) Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ'ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |-z_1| \cdot |\overline{z_2}|$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z οι οποίοι δεν είναι φανταστικοί και για τους οποίους ισχύει $Re(z+\frac{1}{z})=2\cdot Re(z)$ (1) .

Β1. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z κινούνται στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=1$, από τον οποίο έχουν εξαιρεθεί δύο σημεία .

Μονάδες 8

Β2. Αν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί που επαληθεύουν την (1), να δείξετε ότι

i) ο $u=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ με $1+z_1z_2\neq 0$, είναι πραγματικός

Μονάδες 4

ii) ισχύει $|z_1-z_2|\leq 2$

Μονάδες 4

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $z^2=\bar{z}$.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε που κινείται η εικόνα του $w=\frac{2\cdot z-i}{i\cdot z+2}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}\cdot(x^2+1)$, $x\in R$

Γ1. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2+1=2011\cdot e^x$

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x^4+1}{x^2+1} > e^{x^2-x}$, $x \in R$

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) - 2x = \int_0^{2x} f\left(\frac{2x-t}{2}\right)dt \text{ για κάθε } x \in R \text{ και}$$

$$\int_0^1 x \cdot g(x+t)dt \le f(x) \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να δείξετε ότι

Δ1. η f είναι παραγωγίσιμη στο R

Μονάδες 3

Δ2. ο τύπος της f είναι $f(x) = e^{2x} - 1$

Μονάδες 7

Δ3. $\int_0^1 g(x)dx = 2$

Μονάδες 5

Δ4. υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{\xi} g(t)dt = 1$

Μονάδες 5

Δ5. η εξίσωση $\int_0^x g(t)dt = 1 - x \cdot g(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot i$

Επομένως $x+\frac{x}{x^2+y^2}=2x\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+y^2}=x\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^2+y^2=1$ δηλ. ο Γ.Τ είναι ο μοναδιαίος κύκλος χωρίς τα σημεία $(0,1),(0,-1)$

Β2. i) $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ και $\bar{u}=...=u$

ii) $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|=1+1=2$ ή διαφορετικά :

η απόσταση δύο σημείων του κύκλου είναι χορδή του κύκλου οπότε έχει μέγιστη τιμή ίση με 2ρ δηλ. 2

Β3. Είναι $z\neq 0$ άρα $z^2=\bar{z}\Leftrightarrow z^3=z\cdot\bar{z}\Leftrightarrow z^3=1$ ... ή θέτουμε $z=x+yi$

Β4. $w=\frac{2\cdot z-i}{i\cdot z+2}\Leftrightarrow i\cdot z\cdot w+2w=2\cdot z-i\Leftrightarrow(i\cdot w-2)\cdot z=-i-2w$ άρα

$|(i\cdot w-2)\cdot z|=|-i-2w|\Leftrightarrow|i\cdot w-2|\cdot|z|=|i+2w|\Leftrightarrow|i\cdot w-2|=|i+2w|\Leftrightarrow...\Leftrightarrow|w|=1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x)<0$ για $x\neq 1$ άρα η συνεχής f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Γ2. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\cdot(x^2+1)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cdot(x^2+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

Η f συνεχής στο R , άρα $f(A)=(0,+\infty)$

Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$x^2+1=2011\cdot e^x\Leftrightarrow e^{-x}\left(x^2+1\right)=2011\Leftrightarrow f(x)=2011$

Το $2011\in f(A)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R , άρα η εξίσωση θα έχει μοναδική λύση στο R .

Γ3. $\frac{x^4+1}{x^2+1}>e^{x^2-x}\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot\left(x^4+1\right)>e^x\cdot\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow f(x^2)>f(x)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x^2<x\Leftrightarrow...$

Γ4. $x\leq t\leq x+1\Leftrightarrow f(x)\geq f(t)\geq f(x+1)$

άρα ολοκληρώνοντας στο [x , x+1] (η f συνεχής στο R) έχουμε

$$\int_x^{x+1} f(x)dt \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq \int_x^{x+1} f(x+1)dt \Leftrightarrow f(x)(x+1-x) \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq f(x+1)(x+1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \int_x^{x+1} f(t)dt \geq f(x+1)$$

και με κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτω $\frac{2x-t}{2} = u$ οπότε $-dt = 2\cdot du$

και για $t = 0$, $u = x$ ενώ για $t = 2x$, $u = 0$. Επομένως

$f(x) = 2x + 2\cdot\int_0^x f(u)du$ δηλ. παραγωγίσιμη .

Δ2. Παραγωγίζουμε και έχουμε

$$f'(x) = 2 + 2\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2\cdot f(x) = 2 \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x) - 2\cdot e^{-2x}\cdot f(x) = 2\cdot e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-2x}f(x)\right)' = \left(-e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) = -e^{-2x} + c$$

και τελικά $f(x) = e^{2x} - 1$

Δ3. Στο $\int_0^1 g(x+t)dt$ θέτουμε $x + t = u$ και καταλήγουμε

$e^{2x} - 1 - x\cdot\int_0^1 g(t)dt \geq 0$.

Θεωρούμε $h(x) = e^{2x} - 1 - x\cdot\int_0^1 g(t)dt$ και με Fermat προκύπτει

$h'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 g(t)dt = 2$

Δ4. Bolzano στη $\varphi(x) = \int_0^x g(t)dt - 1$ στο [0 , 1]

Δ5. Rolle στη $M(x) = x\cdot\int_0^x g(t)dt - x$ στο [0 , ξ]