Μαθηματικά Β Λυκείου

Εξίσωση ευθείας

Χειρόγραφες σημειώσεις-Ασκήσεις

Δεκέμβριος 2013

Βλάστος Αιμίλιος

Μαθηματικός στο ΜΣΚ

Β' Λυκείου | Ευθείες

• Εισαγωγικά

Ας αρχίσουμε με την εξίσωση, που είναι μια ισότητα με άγνωστο ή άγνωστα γράμματα

π.χ. $x=1$ αυτή η εξίσωση έχει αυτοαπομονωθεί αφού έχει λύση το 1. Με επαλήθευση: $\boxed{x=1} \xRightarrow{\text{π.χ. } x=1} \boxed{1=1}$ ισχύει.

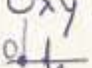
π.χ η $x^2-4=0$ έχει λύση την $x=2$ ή $x=-2$

Εξίσωση γραμμής

Όπως φαίνεται από τον τίτλο πάλι μιλάμε για εξίσωση αλλά εδώ έχουμε 2 γράμματα - μεταβλητές τα x, y (συνήθως)

π.χ η εξίσωση γραμμής $x=1 \overset{\text{ισοδύναμα}}{\iff} x+0y=1$ έχει σαν λύσεις ζεύγη που σίγουρα $x=1$ & το y τυχαίο

Μερικές λύσεις: $(1,0), (1,1), (1,2), (1,-2)$ κλπ

καταλαβαίνω κανείς ότι έχουμε άπειρες λύσεις, που αν παρασταθούν σε σύστημα Oxy δίνουν μια γραμμή, στο πχ μας μια κατακόρυφη ευθεία 

π.χ η εξίσωση $y=x^2$ λέγεται και εξίσωση παραβολής ή απλά παραβολή 

π.χ Αν ο κύκλος $x^2+y^2=\rho^2$ διέρχεται από το $(1,1)$ τότε φυσικά $\xRightarrow[x=1=y]{x^2+y^2=\rho^2} 2=\rho^2$ άρα $\rho=\sqrt{2}$

*** Δηλ. όταν μια γραμμή περνά από ένα σημείο (α,β) τότε αυτό την επαληθεύει δηλ. βάζω όπου $x=\alpha$, $y=\beta$ και παίρνω μια ισότητα αληθή, την οποία κάνω ότι θέλω εγώ ή ότι μου πει η άσκηση***

Ένα π.χ πιο "περίεργο": Να βρεθεί η εξίσωση γραμμής $x^2-4=0$

Εδώ υπάρχει & το y σαν $0y+x^2-4=0 \iff x^2-4=0 \iff x=2$ ή $x=-2$

όπως λύνουμε δηλαδή μια εξίσωση. Να μην ξεχάσουμε όμως και το y. Από την πρώτη λύση $x=2 \xRightarrow{\text{λύσεις}} (2,-2),(2,0),(2,7)$ κλπ καταλαβαίνουμε ότι έχουμε την ευθεία $x=2$ & φυσικά & την ευθεία $x=-2$

π.χ $\boxed{\text{Να λυθεί η εξίσωση γραμμής } x^2+y^2=0}$

Εδώ η λύση είναι μόνο το $x=0$ ή $y=0$ άρα η εξίσωση της γραμμής είναι μόνο το σημείο $O(0,0)$

π.χ $\boxed{\text{Να λυθεί η εξίσωση γραμμής } x^2+y^2=4}$

Εδώ οι λύσεις είναι άπειρες (αρκεί να δώσουμε στο ένα γράμμα άπειρες τιμές ή να βρούμε το άλλο)

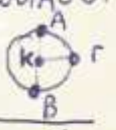
όπως $(1,\pm\sqrt{3}), (\pm\sqrt{3},1), (0,\pm 2), (\pm 2,0)$ κλπ.

Δεν χρειάζεται να τις γράψουμε όλες φυσικά, αλλά να αναγνωρίζουμε ότι η εξίσωση αυτή είναι ένας κύκλος (ξεχωριστό κεφάλαιο μετά)

Αν και αυτά τα περιγράφουμε σε άλλο κεφάλαιο, μπορούμε να βρούμε το κέντρο;

Το κέντρο του κύκλου έστω $K(\alpha,\beta)$ έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τρία τυχαία σημεία του κύκλου.

π.χ από τα $A(0,2), B(0,-2), \Gamma(2,0)$



Αν εφαρμόσουμε τον τύπο $d=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=AB$

τότε $d(K,A)=d(K,B) \Rightarrow \dots \beta=0$

ή $d(K,A)=d(K,\Gamma) \Rightarrow \alpha=0$ Δηλ το κέντρο $(0,0)$

π.χ $\boxed{\text{Να λυθεί η εξίσωση γραμμής } xy^2-2xy+x=0}$

είναι $x\cdot(y^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x(y-1)^2=0 \Rightarrow x=0$ ή $y=1$

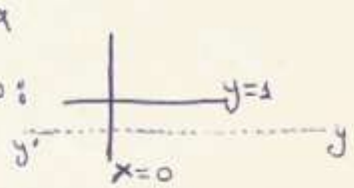
δηλ έχω τα σημεία $(0,1), (0,2), (0,-4), \dots (0,y)$ y τυχαίο

που φυσικά είναι ο άξονας yy'

αλλά και τα σημεία $(-5,1), (0,1), (1,1), \dots (x,1)$, x τυχαίο

που είναι φυσικά μια οριζόντια ευθεία

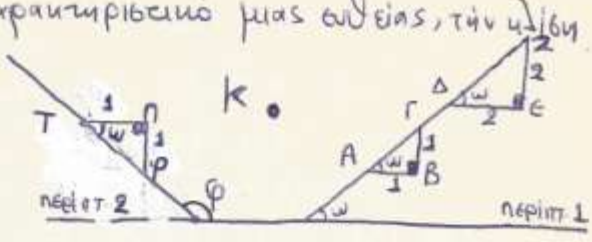
Αν αναπαραστήσω γραφικά τη λύση έχω:



κλίση Εξίσωση ευθείας

Ας ξεκινήσουμε με ένα σπουδαίο χαρακτηριστικό μιας ευθείας, την κλίση

Στο διπλανό σχήμα (περίπτωση 1)
όσα ορθ. τρίγωνα κι να σχηματίσουμε
θα έχω το χαρακτηριστικό
$εφω = \frac{BΓ}{AB} = \frac{1}{1} = \frac{ZE}{ΔE} = \frac{2}{2} = 1$



Ο αριθμός 1 είναι η κλίση της ευθείας, συμβολίζεται συνήθως με $λ$

Αναρωτηθείτε τώρα είστε στο K κι θέλετε μια ευθεία με κλίση $λ=1$
από το K πάτε δεξιά 1 κι πάνω 1 (κλίση $1/1$), ονομάστε το σημείο Λ
ενώστε τα K, Λ οπότε πήρατε την ευθεία KΛ

Δηλαδή σχεδιαστικά λύσαμε το πρόβλημα:

Εξίσωση ευθείας από γνωστό σημείο $K_{(x_0,y_0)}$ κι συντ. δ/νσης $λ$

Για να το λύσουμε αλγεβρικά δηλαδή να βρούμε την εξίσωση της ευθείας,
χρησιμοποιούμε τον τύπο $\boxed{y-y_0=λ(x-x_0)}$

έτσι αν $K(2,4)$ τότε η $ε_1$: που διέρχεται από το K με $λ=1$
έχει εξίσωση $y-4=1(x-2) \Leftrightarrow y=x+2$ ή $y=1x+2$ για να βλέπουμε κι τον σ. δ/νσης

αν $A(4,2)$ τότε η $ε_2$: που διέρχεται από το A με $λ=1$
είναι $ε_2$: $y-2=1(x-4) \Leftrightarrow y=1x-2$

<u>Παρατηρείστε</u>

οι $ε_1, ε_2$ έχουν ίσους συντ. δ/νσης
Αν είστε καλοί στην Γεωμετρία κι στην Τριγωνομετρία κι σχεδιάστε την $ε_1$ από το K
(δεξιά 1, πάνω 1) θα καταλήξετε ότι $ε_1 // ε_2$.

Γενικά σημειώστε ότι
$$\boxed{\begin{array}{l} ε_1 // ε_2 \Leftrightarrow λ_{ε_1} = λ_{ε_2} \\ ε_1 \perp ε_2 \Leftrightarrow λ_{ε_1} \cdot λ_{ε_2} = -1 \end{array}}$$

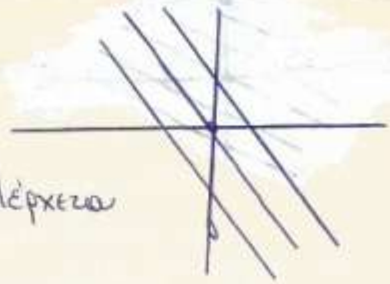
Ας δούμε τώρα

την ευθεία που περνά από το T κι $\boxed{\text{έχει κλίση πάλι 1;}}$ Από το T πάμε δεξιά 1
και για να βρεθώ πάλι στην ευθεία <u>κατεβαίνω</u> 1. Στην περίπτωση 2
λέμε ότι η ευθεία έχει $\boxed{\text{κλίση } -1}$

Άλλωστε ο συντ. δ/νσης είναι η εφαπτομένη της $φ > 90°$ άρα $εφφ < 0$
κι φυσικά $εφφ = -εφω = -1$

Έτσι αν $T(-2,3)$ τότε TP: $y-3=-1(x+2) \Leftrightarrow y=-x+1$

Π.χ. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μια ομάδα-οικογένεια ευθειών παράλληλες με $\lambda=-1$



Έστω θέλουμε να βρούμε αυτή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

α' τρόπος $y-0=-1(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y=-x}$

β' τρόπος Κάθε ευθεία με $\lambda=-1$ γράφεται $y=-1x+\beta \xrightarrow[(0,0)]{\text{περνά από}} 0=0+\beta$

άρα $\beta=0$ & η ζητούμενη: $\boxed{y=-x}$

Σημείωση ** η $y=-x$ έχει $\lambda=-1$ άρα $εφω=-1$ άρα $ω=135°$

οπότε η $y=-x$ είναι η διχοτόμος της β'-δ' γωνίας του Oxy

& φυσικά η $y=x$ είναι η διχοτόμος της α'-γ' γωνίας ***

Κλίση σε ειδικές ευθείες

Οριζόντια ευθεία

A $(1,4)$ B $(2,4)$

Στο σχήμα αυτό από το A προχωρούμε 1 δεξιά, 0 πάνω ή κάτω & καταλήγω στο B, τότε η κλίση είναι $\frac{0}{1}=0$

Επίσης μπορείς να καταλάβεις ότι $ω=0° \Rightarrow εφω=0$ έτσι πάλι η κλίση είναι 0

Εξίσωση της οριζόντιας ευθείας που περνά από το $A(1,4)$

α' τρόπος $y-4=0(x-1) \Leftrightarrow y=4$

β' τρόπος Τα σημεία αυτής της ευθείας είναι $(1,4),(2,4),(-5,4)\ldots(κ,4)$ δηλαδή δεν ενδιαφέρει το x αλλά το y να είναι 4 : $y=4$

Κατακόρυφη ευθεία

$Γ(1,2)$
$Δ(1,-5)$

Στο σχήμα αυτό από το Γ πάμε 0 αριστερά ή δεξιά & κάτω 7

επειδή η κλίση ακολουθεί τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας $\frac{y}{x}=\frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}=\frac{\text{πάνω ή κάτω}}{\text{αριστερά ή δεξιά}}$ έχω $\frac{7}{0}$ που δεν ορίζεται. Επίσης μπορείς να καταλάβεις ότι $ω=90°$ & $εφ90°$ δεν ορίζεται. Έτσι η κατακόρυφη ευθεία δεν έχει λ

** Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν έχει & εξίσωση *

Εύρεση εξίσωσης κατακόρυφης που περνά π.χ. από το $Γ(1,2)$

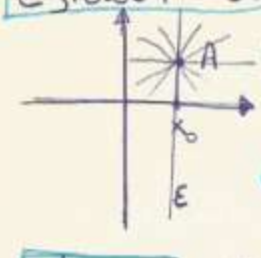
Σίγουρα δεν χρησιμοποιώ τον τύπο $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ (γιατί έχει λ)

Μπορείς να παρατηρήσεις ότι τα σημεία αυτής της ευθείας είναι $(1,2),(1,-5),(1,0),(1,4),\ldots(1,y)$ δηλ. το y είναι τυχαίο αλλά το x είναι 1

δηλ. είναι η $x=1$

Εξίσωση ευθείας που περνά από το $A(x_0,y_0)$

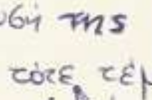
σελίδας



- αν έχει λ τότε η ζητούμενη είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$
  $\Leftrightarrow y=\lambda x\underbrace{-\lambda x_0+y_0}_{\text{το θέτω } \beta} \Leftrightarrow y=\lambda x+\beta$
- αν δεν έχει λ τότε η ζητούμενη είναι κατακόρυφη και είναι η $\boxed{x=x_0} \to \varepsilon$

Άσκηση Μια ευθεία διέρχεται από το $M(1,4)$, τέμνει τον xx' στο σημείο B. Αν το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}O$ όπου $A(0,2)$, έχει εμβαδό 1 τότε να βρείτε την εξίσωσή της

Έστω η ζητούμενη είναι η $x=1$ (δεν έχει λ) τότε τέμνει τον xx' στο $B(1,0)$ τότε $(A\overset{\Delta}{B}O)=\frac{1}{2}2\cdot1=1$



Έστω η ζητούμενη είναι η $y-4=\lambda(x-1)$ (υποθέτω έχει λ)

τότε $\xrightarrow[\text{βρίσκω στ με } xx']{y=0} \lambda x-\lambda=-4 \xrightarrow[\text{το } \lambda \text{ ή το } x;]{\text{σε ποιο το ψάχνω}} \lambda x=\lambda-4 \xrightarrow[\text{η ευθεία ορίζεται και δεν τέμνει τον } xx'!!]{\text{αν } \lambda=0} x=\frac{\lambda-4}{\lambda}$

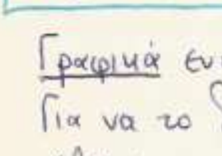
$E=1$ τότε $\frac{1}{2}\cdot2\left|\frac{\lambda-4}{\lambda}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda-4}{\lambda}\right|=1 \Rightarrow$

$|\lambda-4|=|\lambda| \Leftrightarrow \cdots \lambda=2$, και η ζητούμενη είναι η $y=2x+2$

Άρα το πρόβλημα έχει 2 λύσεις: $x=1$, $y=2x+2$

Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

Γραφικά ενώνω τα 2 σημεία και βρίσκω την ευθεία
Για να το δούμε και αλγεβρικά ας δούμε ξανά την κλίση ευθείας που περνά από 2 σημεία $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$



$\lambda_{AB}=\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, αυτός είναι ένας απλός και σημαντικός τύπος.

π.χ. Βρείτε εξ.ευθ. από $A(3,2), B(-1,-1)$
$\lambda_{AB}=\frac{-1-2}{-1-3}=\frac{3}{4}$ άρα η AB: $y-2=\frac{3}{4}(x-3)$

π.χ. από τα $A(3,2), B(3,-4)$
$\lambda_{AB}=\frac{-4-2}{3-3}$ δεν ορίζεται αλλά μην ανησυχείς, ξέρεις είναι κατακόρυφη $\boxed{x=3}$
επίσης μπορείς να σχεδιάσεις τα σημεία με ακρίβεια και να δεις την

π.χ. από τα $A(3,2), B(-4,2)$
$\lambda_{AB}=0$ άρα η AB ορίζονται: η $y=2$, (επίσης μπορείς να την σχεδιάσεις, επίσης μπορείς να πάρεις τον τύπο $y-2=0(x-3) \Leftrightarrow y=2$

$\boxed{\text{όλα μαζεμένα}}$: κλίση $= \lambda =$ εφω $= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ σελίδα 6

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \ , \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$$

Δύο οριζόντιες ή 2 κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους

Μια οριζόντια ή μια κατακόρυφη είναι κάθετες.

$\boxed{y-y_0 = \lambda(x-x_0)}$ → δίνει εξίσωση ευθείας που έχει λ ή περνά από το σημείο $A(x_0, y_0)$

$\boxed{x = x_0}$ → δίνει εξίσωση ευθείας που περνά από το A ή δεν έχει λ

Οι ευθείες που διέρχονται από το $O(0,0)$ επαληθεύονται από αυτό. οπότε αν έχουν συντ. διευθ. τότε είναι $\boxed{y = \lambda x}$ αλλιώς είναι η $\boxed{x=0}$

Οι διχοτόμοι είναι $y = x$, $y=-x$

Οι παράλληλες της $y=-3x$ είναι οι $y=-3x+\beta$

Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσεις τις $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=3$. Τι σχήμα σχηματίζεται; Να βρεις τις εξισώσεις των διαγωνίων του.
2. Δύο ευθείες τέμνονται στο $(1,1)$ ή είναι παράλληλες προς τις διχοτόμους των γωνιών του Oxy επιπέδου. Να βρείτε τις εξισώσεις τους.
3. Μια ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(-1,\alpha)$, $B(2,3)$, $\Gamma(1,-4)$
   α) Νδο $\alpha = 24$ β) Να βρεθεί η $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$ που διέρχεται από το Γ
   γ) i) Αν Μ μέσο του ΑΓ, να βρείτε την οριζόντια - κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το Μ και τέμνουν την ε_1
   ii) Αν Κ, Λ τα παραπάνω σημεία τομής τότε βρείτε $(K\hat{\Lambda}M)$
4. Δίνονται: $AB: y = -\frac{1}{2}x - 2$, $A\Delta: y = \frac{3}{2}x + 2$ που είναι πλευρές του παρ/μου ΑΒΓΔ
   α) Βρείτε το σημείο Α
   β) Αν μια διαγώνιος του ΑΒΓΔ είναι η $\varepsilon: y = \frac{-5}{2}x + 2$ τότε βρείτε i) το σημείο Β ii) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

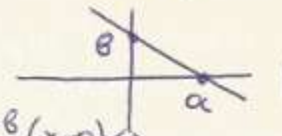
Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

$\lambda = -\frac{A}{B}$ → $-AB_{y\acute{o}}$

Θα κατανοήσουμε το Θεώρημα: Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ (ένα τουλάχιστον) και αντίστροφα.

Με παραδείγματα κ' σχήματα θα δούμε όλες τις μορφές ευθείας

- <u>Πλάγια ευθεία που τέμνει τούς άξονες</u>



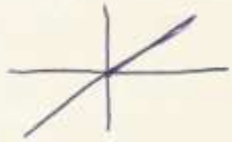
με $\alpha\beta\neq 0$

Τα σημεία είναι $A(\alpha,0), B(0,\beta)$

$\lambda_{AB} = \frac{\beta-0}{0-\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$ οπότε $AB: y-0 = \frac{-\beta}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$y = \frac{-\beta}{\alpha}x+\beta \Leftrightarrow \beta x+\alpha y-\alpha\beta=0$, $A=\beta\neq 0, B=\alpha\neq 0, \Gamma=-\alpha\beta$

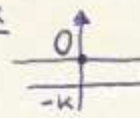
- <u>Πλάγια ευθεία που διέρχεται από το $O(0,0)$</u>



Αν υποθέσουμε έχει λ τότε η εξίσωση είναι

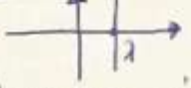
$y=\lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y + 0 = 0$, $A=\lambda$, $B=-1\neq 0$, $\Gamma=0$

- <u>Οριζόντια ευθεία</u>



είναι $y=-\kappa \Leftrightarrow y+\kappa=0$, $A=0, B=1 \overset{\neq 0}{,} \Gamma=\kappa$

- <u>Κατακόρυφη ευθεία</u>



$x=\lambda \Leftrightarrow x-\lambda=0$, $A=1\neq 0, B=0, \Gamma=-\lambda$

Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ένα τουλάχιστον από τα A, B ήταν $\neq 0$

Ας δούμε τώρα τι γίνεται όταν $A=0=B$

<u>περίπτωση 1</u> όταν $\Gamma\neq 0$ π.χ $0x+0y-2=0 \Leftrightarrow -2=0$ αδύνατη.

<u>περίπτωση 2</u> όταν $\Gamma=0$ π.χ $0x+0y=0 \Leftrightarrow 0=0$ ισχύει (αόριστη) αυτό συμβαίνει ότι κάθε ζεύγος (x,y) είναι λύση, άρα το κάθε σημείο, άρα όλα τα σημεία του επιπέδου προέρχονται από την $0x+0y=0$ που φυσικά δεν είναι εξίσωση ευθείας.

<u>Σχετική θέση 2 ευθειών</u> $\varepsilon_1: A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $\varepsilon_2: A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$

αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται τότε $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \underset{\text{αναλογιών}}{\overset{\text{ιδιότητες}}{\Longleftrightarrow}} \frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow \frac{-A_1}{B_1} \neq \frac{-A_2}{B_2} \Leftrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$

αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες τότε $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ π.χ $2x-3y-4=0$, $4x-6y+1=0$

αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται τότε $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \kappa$ έτσι $A_1=\kappa A_2$, $B_1=\kappa B_1$, $\Gamma_1=\kappa\Gamma_2$

δηλαδή αρκεί να πολ/σουμε τους συντελεστές μιας ευθείας με ένα αριθμό για να πάρουμε μια παράλληλη της

π.χ $2x-3y-4=0$, $x-\frac{3}{2}y-2=0$

Παράδειγμα: $x^2+y^2+2xy-4x-4y+3=0_{(1)}$ τι παριστάνει;

μπορούμε να την γράψουμε: $x^2+xy-x+y^2+yx-y-3x-3y+3=0 \Leftrightarrow$
$x(x+y-1)+y(x+y-1)-3(x+y-1)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x+y-3)=0$ οπότε
$x+y-1=0$ ή $x+y-3=0$ δηλ. δύο ευθείες

* Ας δούμε ένα διαφορετικό τρόπο

Θεωρούμε την (1) ως εξίσωση β' βαθμού με άγνωστο το x

δηλ. $x^2+(2y-4)x+y^2-4y+3=0$ με $\alpha=1$, $\beta=2y-4$, $\gamma=y^2-4y+3$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2y-4)^2-4(y^2-4y+3)=4>0$, άρα έχει 2 λύσεις

$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{-2y+4\pm2}{2}$ οπότε $\begin{cases} x=-y+1 \Leftrightarrow x+y-1=0 \\ \text{ή} \\ x=-y+3 \Leftrightarrow x+y-3=0 \end{cases}$ άρα δύο ευθείες

Παράδειγμα Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2+\alpha+2)x+(\alpha-3)y-(3\alpha^2+5\alpha)=0 \quad (2)$

α) Ν.δ.ο η (2) παριστάνει ευθεία $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ που δεν είναι // xx'

β) Να βρείτε σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες.

γ) Βρείτε ποια από αυτές: i) διέρχεται από το $A(1,1)$

ii) είναι κάθετη στην $\varepsilon: x+2y+5=0$

Λύση

α) Αν υποθέσω ότι $\begin{cases} \alpha^2+\alpha+2=0 \\ \text{5'} \\ \alpha-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2+3+2=0 \text{ αδύνατο} \\ \text{5} \\ \alpha=3 \end{cases}$ άρα ένα τουλάχιστον είναι διάφορο του 0

η ευθεία αυτή έχει $\lambda=-\frac{A}{B}=\frac{\alpha^2+\alpha+2}{-(\alpha-3)}$, $\alpha\neq3$ (για $\alpha=3$ είναι κατακόρυφη ευθεία) οπότε είναι ευθεία.

αν ήταν // xx' τότε $\lambda=0$ οπότε $\alpha^2+\alpha+2=0$ αδύνατη αφού $\Delta=-7<0$

β) Αφού είναι ευθεία $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ τότε έχω άπειρες ευθείες

Για $\alpha=0$, $\alpha=1$ παίρνω αντίστοιχα τις $2x-3y=0$, $4x-2y-8=0$

οι οποίες τέμνονται στο $\begin{cases} 2x=3y \\ 2x=y+4 \end{cases} \Rightarrow (3,2)$

Οι "υπόλοιπες" διέρχονται από το $(3,2)$; Αρκεί μια επαλήθευση

έτσι $\xrightarrow[x=3,\,y=2]{(2)} (\alpha^2+\alpha+2)3+(\alpha-3)2-3\alpha^2-5\alpha=0 \Leftrightarrow 0=0$

γ) i) $\xrightarrow[x=1,\,y=1]{(2)} \alpha=-1$ ή $\alpha=-\frac{1}{2}$ οπότε υπάρχουν δύο $\xRightarrow[(2)]{\alpha=-1} 2x-4y+2=0$

$\xRightarrow[(2)]{\alpha=-1/2} \dots$

ii) η $\varepsilon: x+2y+5=0$ έχει $\lambda=-\frac{1}{2}$

οπότε αφού οι ευθείες της μορφής (2) έχουν $\lambda=-\frac{A}{B}=\frac{\alpha^2+\alpha+2}{-\alpha+3}$

οπότε θέλω $\frac{\alpha^2+\alpha+2}{-\alpha+3}=-2$ από όπου βρίσκω το α, αντικαθιστώ στην (2) κ παίρνω την ζητούμενη ευθεία.

Παράδειγμα: Δίνονται οι ευθείες $ε_1: x+y+λ=3$, $ε_2: 2x-y=4λ$, $λ\in R$.

α) Βρείτε το σημείο τομής τους Α

β) Να δείξετε ότι το Α ανήκει σε ευθεία, την οποία να βρείτε.

Λύση α) $\begin{cases} x+y=3-λ \\ 2x-y=4λ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=λ+1 \\ y=-2λ+2 \end{matrix}$ $A(λ+1,-2λ+2)$.

β) Αν δώσω στο $λ$ τιμές πχ $0, \pm1, \pm2$ παίρνω τα σημεία $(1,2),(2,0),(0,4)$ κλπ που αν τοποθετηθούν στο Oxy φαίνεται να σχηματίζουν ευθεία.

Τα παραπάνω είναι ενδείξεις ή όπως λέμε εικασίες.

Αν πράγματι το Α δημιουργεί ευθεία αυτή θα έχει x, y

η τετμημένη του Α είναι $x=λ+1$ αφού θέλω εξίσωση ως προς x, y

η τεταγμένη του Α είναι $y=-2λ+2$ θα απαλείψω το $λ$

έτσι $λ=x-1 \xRightarrow{y=-2λ+2} y=-2(x-1)+2 \Leftrightarrow \boxed{y=-2x+4}$

Γενικότερα η παράμετρος $λ$ μέσα στις συν-νες ενός σημείου το καθιστά μεταβλητό, δηλαδή παράγει άπειρα σημεία τα οποία βρίσκονται η επαληθεύουν την εξίσωση μιας γραμμής

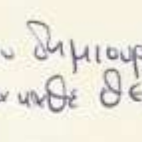
π.χ $A(ημθ, συνθ)$ είναι $x=ημθ, y=συνθ \xRightarrow{ημ^2θ+συν^2θ=1} \boxed{x^2+y^2=1}$ που είναι εξίσωση κύκλου.

Ασκήσεις

5) $M(ημθ-1, συνθ-3)$ βρείτε την εξίσωση της γραμμής που δημιουργεί το Μ για κάθε $θ\in R$

6) Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(2κ+1,κ)$, $κ\in R$.

α) Νδο το Β ανήκει-δημιουργεί την $ε: x-2y-1=0$



β) Βρείτε την προβολή Μ του Α στην ε

γ) Βρείτε το συμμετρικό Γ του Α ως προς το Μ

δ) Νδο το $\overset{\triangle}{ABΓ}$ είναι ισοσκελές

ε) Βρείτε το $κ\in R$ ώστε $\overset{\triangle}{ABΓ}$ ορθογώνιο στο Β

υποδείξεις α) όπως στο λυμένο

β) το Μ είναι σημείο τομής της ε με την ΑΜ

γ) το Μ θα είναι μέσο του ΑΓ

δ) απλή Γεωμετρία

ε) $ΓB \perp AB \Leftrightarrow$ συντελεστές

(Απόσταση) σημείου $A(x_0,y_0)$ από την $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$

συμβολισμός $\boxed{d(A,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$

π.χ. $\varepsilon_1: 2x-3y+1=0$, $\varepsilon_2: 4x-6y+9=0$ Ποια η απόσταση τους;

Είναι φανερό ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

Παίρνω τυχαίο σημείο στην ε_1 $\xrightarrow[x=1]{2x-3y+1=0}$ $y=1$ έτσι το $A(1,1)\in\varepsilon_1$

Παίρνω $d(A,\varepsilon_2)=\frac{|4\cdot 1-6\cdot 1+9|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{7}{\sqrt{52}}=\frac{7\sqrt{52}}{52}$

Κι αυτή είναι κι η απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (αφού είναι παράλληλες)

Υπολογισμός (εμβαδού) τριγώνου $\hat{AB\Gamma}$

$E=(\hat{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right|$ → απόλυτο

Θυμίζω $\vec{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A)$

$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}x_{AB} & y_{AB}\\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma}\end{vmatrix}$

π.χ. $A(1,-1)$ $B(0,2)$, $\Gamma(1,2)$

$\vec{AB}=(-1,3)$, $\vec{A\Gamma}=(0,3)$

$\det=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3\neq 0$ γεγονός που μας λέει ότι σχηματίζεται τρίγωνο

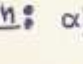
άρα $E=\frac{1}{2}|-3|=\frac{3}{2}$ τ.μ

Παράδειγμα: Δίνεται η $\varepsilon: y=x$

α) Ν.δο το συμμετρικό του $M(\alpha,\beta)$ ως προς την $y=x$ είναι το $M'(\beta,\alpha)$

β) Βρείτε σημείο A της ε που απέχει από την ε': $x-2y+1=0$ απόσταση $\sqrt{5}$

γ) Βρείτε το Εμβαδό του $\hat{AB\Gamma}$ όπου $B(1,10)$ και Γ το συμμετρικό του B ως προς την ε και A σημείο του β) ερωτήματος που βρίσκεται στο γ' τεταρτ.

Λύση: α)  η MM': $y-\beta=-1(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-x+\alpha+\beta$

το $K:\begin{cases}y=x\\ y=-x+\alpha+\beta\end{cases}$ $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Αν $M'(\kappa,\lambda)$ τότε λόγω ότι K μέσο είναι $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\kappa+\alpha}{2}\Rightarrow \kappa=\beta$ όμοια $\lambda=\alpha$ άρα $M'(\beta,\alpha)$

β) Έστω (γ,δ) σημείο της ε τότε $\gamma=\delta$

η απόσταση του από την ε': $\frac{|\gamma-2\delta+1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|\gamma-2\gamma+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|\gamma-1|}{\sqrt{5}}$

τότε είναι $|\gamma-1|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\Leftrightarrow|\gamma-1|=5$ άρα $\gamma=6$ ή $\gamma=-4$ οπότε υπάρχουν 2 σημεία τα $(6,6)$ και $(-4,-4)$

γ) Είναι $\boxed{A(-4,-4)}$ (γ' τεταρτ.) $B(1,10)$, $\Gamma(10,1)$, $\vec{AB}=(5,14)$, $\vec{B\Gamma}=(9,-9)$

$\det=\begin{vmatrix}5 & 14\\ 9 & -9\end{vmatrix}=-171$, $E=\frac{1}{2}|-171|=\frac{171}{2}$ τμ.

Ασκήσεις

7. Δίνονται τα σημεία $A(-1,0), B(2,-1), \Gamma(4,3)$
   α) Υπολογίστε το $(A\hat{B}\Gamma)$
   β) Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, υπολογίστε το εμβαδόν του και το σημείο Δ

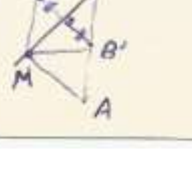
8. Δίνονται οι $\varepsilon_1: 2x-3y=1$, $\varepsilon_2: 4x-6y=9$ Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου (ευθεία $\varepsilon_3 // \varepsilon_1$ που κάθε σημείο της ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$)

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-5x+5y+6=0$ (1)
   α) Νδο η (1) παριστάνει τις παράλληλες ευθείες $x-y=2$, $x-y=3$
   β) Νδο ότι μία από αυτές συντρέχει (από το ίδιο σημείο) με τις $y=2x-5$, $y=-x+4$
   γ) Οι ευθείες $x-y=2$, $x-y=3$, $y=2x-5$, $y=-x+4$ σχηματίζουν ένα τρίγωνο του οποίου βρείτε το εμβαδό

10. Δίνεται το σημείο $B(2,3)$
    α) Βρείτε εξίσωση ευθείας που έχει συντελεστή δ/νσης λ που διέρχεται από το $A(1,0)$ & απέχει από το B απόσταση ίση με 1
    β) Νδο υπάρχει & δεύτερη ευθεία που διέρχεται από το A & απέχει από το B απόσταση 1

11. Δίνονται τα σημεία $A(0,4), B(3,7), M(\kappa-1, \kappa+1), \kappa\in\mathbb{R}$
    α) Νδο τα A,B,M σχηματίζουν τρίγωνο με σταθερό εμβαδό (ανεξάρτητο του κ)
    β) Βρείτε την ευθεία (ε) στην οποία βρίσκεται το M $\to y=x+2$
    γ) Βρείτε το συμμετρικό B' του B ως προς την (ε)
    δ). Βρείτε το $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε A, M, B' συνευθειακά.
    ε). Αποδείξτε ότι για την παραπάνω τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ το άθροισμα $(AM)+(MB)$ γίνεται ελάχιστο, βρείτε την ελάχιστη τιμή

<u>υπόδειξη στο ε</u>



Τριγωνική ανισότητα
$AM+MB = AM+MB' \geq AB'$
η ισότητα ισχύει όταν A,M,B' συνευθειακά