ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Επιμέλεια Αιμίλιος Βλάστος Μαθηματικός

ΘΕΜΑ 1ο : Ε.Μ.Ε 2010

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς **z(t)**$=\frac{1}{2+ti}$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathbf{z(t)+\overline{z(t)}=4z(t).\overline{z(t)}}$

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z(t) είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο **Κ (1/4 ,0)** και ακτίνα **ρ=1/4,** εξαιρουμένου του **Ο(0,0)**

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών **z(t)** και $z\left(\frac{-4}{t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών **z(1), z(-4) είναι** αντιδιαμετρικά σημεία σημεία του προηγούμενου κύκλου.

ii) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών **z(1), z(-4) και z(2010)** είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Υπόδειξη: γ) αντιδιαμετρικά σημαίνει έχουν απόσταση 2ρ μήκος διάμετρου
δ) σχήμα, αρκεί το z(2010) να είναι διαφορετικό από τα άλλα

ΘΕΜΑ 2ο : Ε.Μ.Ε 2010

Έστω ο μιγαδικός αριθμός **z=λ(1+i)+1-i**

α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει η εικόνα του z.

β) Για ποια τιμή του λ, το |**z**| γίνεται ελάχιστο;

γ) Υποθέτουμε ότι λ>0 . Αν|**z**|=$\mathbf{2\sqrt{2}}$ και **w=** $\frac{z}{\sqrt{3}-i}$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι **λ=**$\sqrt{3}$ και **w=1+i**

ii) Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού ν, ώστε w^{2v} ∈ R

Υπόδειξη: χ-ψ=2, λ=0,η εύρεσή του γεωμετρική , ή αλγεβρική με βάση συνάρτηση για το ελάχιστο, ν={2,4,6,…}

ΘΕΜΑ 3ο : Ε.Μ.Ε 2010

Δίνονται οι μιγαδικοί z,u,w που ικανοποιούν τις σχέσεις **|z|=**$\sqrt{2}$**, Re(**$\frac{u+3i}{u-3i}$**)=0 ,u ≠3i και** $(w+2)^8=16(w+1)^8$

α) Να αποδείξετε των **|w|=**$\sqrt{2}$**, |u|=3**

β) Να αποδείξετε ότι **z+w+u≠0**

Βλάστος Αιμίλιος Μαθηματικός

γ) Να αποδείξετε ότι $\left| z+w+u \right| = \frac{1}{6} \left|2zu+2uw+9zw\right|$

Υπόδειξη: α) $(w+2)^8 = 16(w+1)^8$ **δεν διώχνω τους εκθέτες, αλλά παίρνω μέτρα β) απαγωγή σε άτοπο με βάση την τρ. ανισότητα**

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> : Ε.Μ.Ε 2010

Δίνονται οι μιγαδικοί z,u,w. Αν ισχύουν $|z|=|w|=|u|=1$ και $z+u+w\neq 0$
και $z^2+w^2+u^2=0$ τότε να δείξετε ότι

α) $|z^2+w^2|=|w^2+u^2|=|z^2+u^2|$

β) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{u^2}=0$

γ) οι εικόνες των z,u,w , z.u.w και $\frac{z.u+z.w+u.w}{z+u+w}$ είναι ομοκυκλικά σημεία

δ) $|z+u+w|^2=2$

Υπόδειξη: γ) z,u,w, ανήκουν σε δεδομένο κύκλο, αρκεί και τα άλλα να ανήκουν σε αυτόν.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> : Ε.Μ.Ε 2010

Έστω οι μιγαδικοί **z= 2+συν(πt)+(5+ημ(πt))i** , t∈(0,+ ∞)

α) Να δείξετε ότι $|z-2-5i|=1$

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει t∈[0,+∞)τέτοιος, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πάνω στην ευθεία y=x

δ) Έστω w ∈ C τέτοιος ώστε $|w-1|=|w-i|$,Να δείξετε ότι $|z-w|\geq 3\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

Υπόδειξη:α) λύστε ως προς z-2-5i, β) $29^{1/2}\pm 1$ γ)δεν επαληθεύεται δ) απαιτείται σχήμα, ο γ. τόπος του w

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> : Ε.Μ.Ε 2010

α) Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με Κ(0,0) και ρ=1 να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w=\frac{1-2z}{z-2}$, z≠2

β) Αν z=x+ψi ,χ,ψER να δείξετε ότι $|z-w|=2.\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$, $xE\ [-1,1]$

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z,w ώστε το $|z-w|$ να είναι μέγιστο και να βρείτε την μέγιστη τιμή του

Βλάστος Αιμίλιος Μαθηματικός

Υπόδειξη: γ) Αν είχαμε τον μιγαδικό u στον ίδιο κύκλο το μέγιστο του|z-u|είναι η διάμετρος του κύκλου =2, αλλά τα z,w είναι αλληλοεξαρτώμενα, δηλαδή η εικόνα του w δεν ελεύθερο σημείο, οπότε το μέγιστο του |z-w|δεν δεν προσεγγίζεται γεωμετρικά αλλά με Max-min συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 7ο Μαυρίδης Γ.

Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ, Ο(0,0) και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1 ,z_2 .
Αν ισχύει $\mathbf{z_1^2 + z_2^2 = z_1 . z_2}$ τότε να δείξετε ότι ισχύει α) $\mathbf{z_1^3 + z_2^3 = 0}$ και ότι $\mathbf{(z_1 - z_2)^2 = -z_1 . z_2}$
β) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο
γ) αν επιπλέον |z2|=2 τότε να δείξετε ότι
i) $\mathbf{|z_1 - z_2| \leq 4}$ **ii)** $\mathbf{|z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_1| < 4\pi}$ όπου z_3, z_4 μιγαδικοί με εικόνες Γ,Δ, που είναι σημεία ομοκυκλικά των Α,Β και το ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο

Υπόδειξη: γ) η περίμετρος ενός κυρτού τετράπλευρου είναι μικρότερη από την περίμετρο του εγγεγραμμένου κύκλου

ΘΕΜΑ8 Μαυρίδης Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(z) = z + \frac{4}{z}}$, z μιγαδικός διάφορος μηδέν.
α) Βρείτε τους z_1, z_2 ώστε f(z) =2
β) Βρείτε τον $\mathbf{z_3 = \frac{z1^4 . z2 + z1 . z2^4}{32}}$
γ) Περιγράψτε που βρίσκονται οι εικόνες των z_1, z_2, z_3
δ)Αν |f(z)|=|z|, z≠0 τότε
i)Βρείτε τον γ. τόπο των μιγαδικών z
ii)Αν w, u δύο από τους μιγαδικούς του προηγούμενου γ. τόπου με επιπλέον **Im(w).Im(u)<0** τότε βρείτε την ελάχιστη τιμή του |w-u|

Υπόδειξη: γ) ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο …δ) να σχεδιαστεί η υπερβολή $ψ^2$-$χ^2$=2, min=$2.2^{1/2}$

ΘΕΜΑ9 Δ. Ντρίζος

Δίνονται οι μιγαδικοί u, v, w που έχουν ίσα μέτρα κ>0 και ο z= $\frac{uv+vw+wu}{u+w+v}$

Να δείξετε ότι: α) $\bar{\boldsymbol{z}} = \frac{\boldsymbol{k^2}}{\boldsymbol{z}}$ β) οι εικόνες των z, u, v, w ανήκουν στον ίδιο κύκλο C
γ) ο αριθμός $(\bar{u} + w)$ $(\bar{w} + v)$($(\bar{v} + u)$ είναι πραγματικός
δ) ο αριθμός $\frac{w^3 + v^3}{(w-v)^3}$ είναι φανταστικός.

Βλάστος Αιμίλιος Μαθηματικός

ε) οι εικόνες των $(\bar{u} + w)$ $(\bar{w} + v)$($(\bar{v} + u)$, $\dfrac{w^3+v^3}{(u-v)^3}$, $\dfrac{w^3+v^3}{(v-w)^3}$ σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

* Να δικαιολογήσετε ότι το ε) ισχύει όταν μεταξύ των εικόνων των u, v, w δεν υπάρχουν δύο που να είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλουC
ή δεν είναι άκρα χορδής παράλληλης προς τον χ΄χ.

ΘΕΜΑ10 Δ. Ντρίζος

Δίνονται οι μιγαδικοί $\mathbf{z_1=3\alpha+10\beta i}$, $\mathbf{z_2=3\gamma+10\beta i}$,
ώστε $\mathbf{|z_1 - z_2| = | z_1 + z_2|}$, όπου α,β,γ πραγματικοί και β≠0.
Θεωρούμε την $\mathbf{f(x)=5x^7+4x^5-3\alpha\gamma x}$, x είναι πραγματικός
Να δείξετε ότι:
α) $\mathbf{100\beta^2+9\alpha\gamma=Re(\overline{z_1}.z_2)=0}$
β) οι εικόνες των z_1, z_2 δεν είναι σημεία των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες τέμνονται κάθετα.
γ) Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=0$
δ) οι $w_1=\dfrac{z1}{z2}$ $w_2=\dfrac{z2}{z1}$ είναι φανταστικοί με $Im(w_1)=\dfrac{30\beta(\gamma-\alpha)}{9\gamma^2+100\beta^2}$

$Im(w_1)=\dfrac{-30\beta(\gamma-\alpha)}{9\alpha^2+100\beta^2}$

ε) Αν επιπλέον α=-γ τότε δείξτε ο εικόνες των w_1, w_2 ισαπέχουν από την εικόνα του αριθμού -1

ΘΕΜΑ11 πανελλαδικές 2012 επαναληπτικές

Δίνεται ο z≠-1 μιγαδικός και ο φανταστικός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ Να δείξετε ότι:
α) |z|=1 β) ο αριθμός $(z-\frac{1}{z})^4$ είναι πραγματικός.
γ) $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z2}\right)(z1+z2)\le 4$ όπου z_1, z_2 μιγαδικοί του α΄ ερωτήματος
δ) Οι εικόνες του u ανήκουν στην υπερβολή $\chi^2-\psi^2=1$ όπου $u-ui=-w+\dfrac{i}{w}$,w≠0

Υπόδειξη: γ) πράξεις δ) ο w είναι φανταστικός οπότε βρίσκουμε τον u

ΘΕΜΑ12 πανελλαδικές 2010 επαναληπτικές

z_1, z_2 είναι οι ρίζες βθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές με z1+ z2=-2 , z1. z2=5

α) Βρείτε τους z_1, z_2

β) Αν $|w- z_1|^2+|w- z_2|^2=|z_1- z_2|^2$ να δείξετε ότι ο γ. τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος $(\chi+1)^2+\psi^2=4$

γ) Από τους μιγαδικούς του β) ερωτήματος βρείτε αυτούς ώστε:2Re(w)+Im(w)=0

δ) Αν w_1,w_2 μιγαδικοί του β) ερωτήματος με $|w_1-w_2|=4$ τότε να δείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$

υπόδειξη δ) σχήμα, τα $|w_1-w_2|=4$, $|w_1+w_2|$ εκφράζουν αποστάσεις, να γίνει σχήμα

ΘΕΜΑ13 πανελλαδικές 2011

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w , z≠3i ώστε $| z -3i |+| \bar{z} +3i |=2$ και $w= z -3i+\frac{1}{z-3i}$

α) βρείτε τον γ. τόπο των εικόνων του z

β) να δείξετε ότι $\bar{z} +3i =\frac{1}{z-3i}$

γ) να δείξετε ότι ο w πραγματικός και ότι $-2\leq w\leq 2$

δ) $|z-w|=|z|$

υπόδειξη α) $| z -3i |=1$ β) από το α) γ) $w= z+\bar{z}$ δ) αν z=χ+ψi τότε w=2χ ενώ το χ έχει πεδίο ορισμού…(σχήμα)

ΘΕΜΑ14

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w, u με |z|=3, |w|=4, |u|=5 , z+ w+ u=0 και Α,Β,Γ αντίστοιχα οι εικόνες τους

α) να δείξετε ότι $16z^2+9w^2=0$

β) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

ΘΕΜΑ15

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με |z+ w |=|z-w|. Αν Α, Β αντίστοιχα οι εικόνες τους

α) να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΟ είναι ορθογώνιο, Ο η αρχή του μιγαδικού επιπέδου.

β) $Re(z. \bar{w})=0$

γ) Αν επιπλέον |z|=|w|τότε να δείξετε ότι $|z+ w |^2+|z-w|^2=4 |w|^2$

υπόδειξη α)Γεωμετρικά (κανόνας παρ/μου) β) και από τη σχέση του Π.Θ.

ΘΕΜΑ16

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με | w |≠0 να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο όπου Α,Β,Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών z+w , z-w, $z+i\sqrt{3}w$

Υπόδειξη: Αλγεβρικά

ΘΕΜΑ17

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|z+w|=|z|=|w|$, $|z|\neq 0$

να δείξετε ότι $|z-w|=\sqrt{3}|z|$

υπόδειξη: Γεωμετρικά(κανόνας παρ/μου) ή αλγεβρικά

ΘΕΜΑ18

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=[(2+i)z+4](iz-1)$, z μιγαδικός .

α) Αν $w=f(1)+4f(-1)+20$ τότε να βρείτε τον φυσικό αριθμό ν ώστε $|w^{\nu}|=16$

β) Αν $f(iz)=z+1$ τότε να βρείτε τον μιγαδικό z

γ) Αν $\left|\frac{f(z)}{z+i}\right|=2\sqrt{5}$ τότε να βρείτε τον γ. τόπο των εικόνων του z.

Υπόδειξη: ν=8 β) i ή 1+2i γ) κύκλος κέντρου (-8/5,4/5), ρ=2

ΘΕΜΑ19

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{z^2-1}{z+\bar{z}}$, z δεν είναι φανταστικός, να δείξετε ότι

α) $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ και $|f(z)|=|f(\bar{z})|$

β) Αν f(z) φανταστικός τότε

i) να βρείτε τον γ. τόπο των εικόνων του z, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $|z|$και ποιοι μιγαδικοί την έχουν.

ii) Βρείτε τον γ. τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w=z+2-i$

iii)Αν $|z|=3$ τότε να βρείτε τον γ. τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w=z+2-i$

Υπόδειξη: β) i)υπερβολή. c: $x^2 - y^2 = 1$ ii) 4σημεία iii) υπερβολή

ΘΕΜΑ20

Δίνεται η εξίσωση $z^2-z+1=0$, z μιγαδικός και z_1, z_2 οι ρίζες της.

α) Βρείτε τον μιγαδικό $w=\frac{z_1+z_2-i}{iz_1z_2-1}$

β) Αν Α,Β, Γ οι εικόνες των z_1 ,z_2 , w τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές

γ) Να δείξετε ότι $z_1^3+z_2^3=-2$ και ότι $(z_1^{10}+z_2^{10})\cdot\left(\frac{1}{z_1^{10}}+\frac{1}{z_2^{10}}\right)=1$

Υπόδειξη: ένας τρόπος με S, P και άλλος να βρείτε τον z^3

ΘΕΜΑ21

Αν $(1+iz)^{2014} = \frac{2+3i}{\sqrt{5}+2i\sqrt{2}}$,z μιγαδικός. Να δείξετε ότι

α) Οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο.

β) ο z δεν είναι πραγματικός

Υπόδειξη: α)μέτρα, β) απαγωγή σε άτοπο

ΘΕΜΑ22 Ορίζοντες

Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο R και ο μιγαδικός z του οποίου η εικόνα κινείται πάνω στην Cf . Για τον z ισχύει $e^{Im(z}$)+ Im(z)=Re(z)+1

α) i. Να δείξετε ότι f(0)=0 και

ii. να βρείτε τον μιγαδικό με το ελάχιστο μέτρο

β) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

γ) Αν Re(z)>0 ⇒ Im(z)< $\frac{\mathrm{Re(z)}}{2}$

δ) Αν w= Im(z)+ iRe(z) τότε βρείτε τον γ.τ. των εικόνων του w.

ε) Αν w≠0 και $8^{Re(w)} - 7^{Re(w)} = 5^{Re(w)} - 4^{Re(w)}$, τότε w=1+ie

Υπόδειξη:α) z=x+if(x), η Cf διέρχεται από το O(0,0) και είναι γν. αύξουσα (φανταστείτε το σχήμα).
γ) ΘΜΤ , δ) σχετίζεται με την f^{-1} , ε) ΘΜΤ

ΘΕΜΑ23 Δ.Ντρίζος

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί **z** που οι εικόνες τους ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Να αποδείξετε ότι:

α) και οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w=$\frac{az-i}{iz+a}$

όπου aΕ $R-\{-1,1\}$, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

β) |w-z|≤2 και $|z^2+1|$≤2|iz+a|

γ) Αν α=0 βρείτε τους w,z ώστε |w-z|=2

*δ) Αν α=0 βρείτε τους z ώστε $|z^2+1|$=2|iz+a|