Ασκήσεις μιγαδικών …με αρκετή Γεωμετρία

Επιμέλεια Αιμίλιος Βλάστος Μαθηματικός

1. Αν τα σημεία Α, Β , Γ είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 ,z_2 , z_3 και ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=1$ και η εικόνα του $z_1+ z_2+ z_3$ είναι το Ο(0,0), τότε νδο

   α) $\bar{z}_i=\frac{1}{z_i}$ για κάθε i=1,2,3

   β) $z_1 z_2+ z_2 z_3+ z_1z_3=0$

   γ) $z^2_1+ z^2_2+ z^2_3=0$

   δ) $z^3_1=z^3_2= z^3_3= z_1 z_2 z_3$

   ε) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
2. Αν για τους μιγαδικούς z_1 ,$z_2\neq0$ είναι $z^2_1+ z^2_2= z_1z_2$ τότε νδο το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο

   υπόδειξη: να σχηματιστούν λόγοι $\frac{z_1}{z_2}$
3. Αν τα σημεία Α, Β , Γ είναι διαφορετικά και είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 ,z_2 , z_3 και οι εικόνες των μιγαδικών $w= z_1+ z_2+ z_3$,$z= z^2_1+ z^2_2+ z^2_3$ είναι το Ο(0,0), τότε νδο

   α) τα σημεία Α, Β , Γ ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=1$

   β) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
4. Αν τα σημεία Α, Β , Γ είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 ,z_2 , z_3 ανήκουν στον κύκλο $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$ και οι εικόνες των μιγαδικών $w= z_1+ z_2+ z_3$, $z= x_o +iy_o$ ταυτίζονται τότε νδο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
5. Αν $z^2+ z+1=0$ τότε νδο

   α) $z^3=1$ β) η εικόνα του z ανήκει στην μεσοκάθετη των εικόνων Α(0), Β(-1)
6. Αν τα σημεία Α, Β είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 ,z_2 και ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=1$ και επίσης ισχύει $z_1z_2-1= z_1+ z_2$

   α) τότε νδο $-z_1z_2+1= \bar{z}_1+ \bar{z}_2$

   β) i Ποια η σχέση των z_1 ,z_2 ; , i) βρείτε το $| z_1-z_2|$

Οι ασκήσεις 1-6 είναι από το Βιβλίο του Ρ. Μπόλη