Σημειώσεις στους μιγαδικούς

(στοιχεία θεωρίας και ασκήσεις)

Η εξίσωση $\chi^2+1=0$

α) όταν χER τότε η εξίσωση $\chi^2+1=0$ είναι αδύνατη

β) όταν χEC τότε προτιμότερο να θέσω z=χ οπότε η εξίσωση $z^2+1=0$ έχει λύση

$z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm i$ ή άλλος τρόπος

$z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2-i^2=0 \Leftrightarrow (z-i)(z+i)=0 \Leftrightarrow z=\pm I$ ή άλλος τρόπος

$z^2+1=0$, βθμια στο C με πραγματικούς συντελεστές α=1, β=0, γ=1, Δ=-4 κλπ.

Η εξίσωση $\chi^3+1=0$

α) όταν χER τότε η εξίσωση $\chi^3+1=0$ έχει λύση την χ=-1

β) όταν χEC τότε προτιμότερο να θέσω z=χ οπότε η εξίσωση $z^3+1=0$ λύνεται:

$z^3+1=0 \Leftrightarrow z^3=-1$, άρα $z=-1$ που είναι λάθος-ημιτελής τρόπος

$z^3+1=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow z=-1$ ή $z^2-z+1=0$ που είναι βθμια στο C με πραγματικούς συντελεστές α=1, β=-1, γ=1, Δ=-3 κλπ

ΔΗΛΑΔΗ ΕΝΑΣ ΣΙΓΟΥΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΙΝΑΙ Η ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2=0$ όπου χ,ψ, είναι πραγματικοί

$\chi^2+\psi^2=0 \Leftrightarrow \chi=\psi=0$

Η εξίσωση $z^2+w^2=0$, όπου z,w είναι μιγαδικοί

$z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z^2-i^2w^2=0 \Leftrightarrow (z-iw)(z+iw)=0 \Leftrightarrow z=\pm iw$

Κάποιες λύσεις: για w=1-2i είναι $z=\pm i(1-2i)=\pm(2+i)$

για w=0 είναι z=0 κλπ.

Δηλαδή βλέπουμε ότι δεν έχει λύση μόνο την z=w=0

Οι εικόνες των z,w που μπορεί να βρίσκονται;

Πρώτα να θυμηθούμε ότι οι εικόνες αναπαριστούνται με σημεία, ότι τα μέτρα με τμήματα ή ακτίνες από την αρχή O(0,0) , είναι δε αριθμοί που δίνονται από τον τύπο $|z|^2=\chi^2+\psi^2$

Έτσι: $z=\pm iw \Rightarrow |z|=|\pm iw| \Leftrightarrow |z|=|iw| \Leftrightarrow |z|=|i||w| \Leftrightarrow ||z|=|w|$

Έτσι μπορούμε να πούμε εικόνες των z,w μπορεί να βρίσκονται σε ένα κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα |w|

ΑΠΟ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΜΕ ΣΕ ΜΕΤΡΑ ΒΑΖΟΥΜΕ $\Rightarrow$

Τετραγωνική ρίζα στο C

Σε μια βθμια στο C με πραγματικούς συντελεστές συχνά βρίσκουμε $\Delta=-5=5i^2$οπότε παίρνουμε τετρ. ρίζα δηλαδή $\pm i\sqrt{5}$ κλπ.

Δεν υπάρχει όμως στο C το σύμβολο της τετρ. Ρίζας

όταν λέμε τετρ. ρίζα του -5 εννοούμε την λύση της $w^2=-5$

Γενικότερα τετρ. ρίζα του 2i εννοούμε την λύση της $w^2=2i \Leftrightarrow (\chi+\psi i)^2=2i$ κλπ.

αποτέλεσμα: $\pm(1+i)$

Δυνάμεις μιγαδικών $z^\kappa+w^\kappa$

<u>Α' περίπτωση:</u> αναλύουμε τον εκθέτη

πχ $i^{80}=i^{20}=1$

πχ $(1+i)^{40}-(1-i)^{40}=((1+i)^2)^{20}\ldots..$

πχ $(1+i\sqrt{3})^{21}=(1+i\sqrt{3})^{3.21}==[(1+i\sqrt{3})^2(1+i\sqrt{3})]^{21}=\ldots.$

<u>Α' περίπτωση:</u> αναλύουμε την μία βάση

πχ $(1+2i)^{82}+(2-i)^{82}$ Γράφουμε $(2-i)^{82}=[i(2/i-1)]^{82}=i^{82}(-2i-1)^{82}=\ldots$

Ρίζες Βθμιας και γ. τόπος

Έστω η $\alpha z^2-\beta z+\gamma=0$, α πραγματικός διάφορος του μηδέν ,β,γ πραγματικοί, z μιγαδικός. Αν w_1, w_2,οι ρίζες της, τότε οι μιγαδικοί : w_1, w_2,$-w_1$, iw_2, $\overline{w_1}$ σε ποιο γ. τόπο ανήκουν;

Γνωρίζουμε $w_2=\overline{w_1}$ άρα οι w_1, w_2 έχουν ίσα μέτρα

Με βάση τις ιδιότητες του μέτρου, είναι εύκολο να δούμε ότι οι μιγαδικοί : w_1, w_2,$-w_1$, iw_2, $\overline{w_1}$ έχουν ίσα μέτρα. Επομένως ο ζητούμενος γ. τόπος είναι κύκλος με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $|w_1|$

Συνεπαγωγή και γ. τόπος

Αν $(1+iz)^2=1$ ποιος είναι ο γ τόπος των εικόνων του z;

Θα πάρουμε μέτρα αλλά περιορίζουμε τη σχέση των μιγαδικών σε σχέση μέτρων.

$|(1+iz)^2|=1 \Leftrightarrow |(1+iz)|^2=1 \Leftrightarrow |(1+iz)|=1 \Leftrightarrow |i(-i+z)|=1 \Leftrightarrow |z-i|=1$ άρα οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (0,1) και ακτίνα 1

Λόγω λοιπόν της συνεπαγωγής δεν λέμε ότι ο γ. τόπος είναι κύκλος!

Αυτό μπορούμε να το δούμε και αν εργαστούμε:

$(1+iz)^2=1 \Leftrightarrow 1+iz=\pm 1$, οπότε $z=0$ ή $z=2i$

Δηλαδή ο γ. τόπος των εικόνων του z είναι τα σημεία (0,0) και (0,1) τα οποία βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο (0,1) και ακτίνα 1

Απαγωγή σε άτοπο

Π.χ. Αν $(1+iz)^7=(z+i)^5$ τότε ο z δεν είναι πραγματικός

Έστω ο z είναι πραγματικός, τότε θέτω z=λ, λ πραγματικός

$(1+iz)^7=(z+i)^5 \Leftrightarrow (1+i\lambda)^7=(\lambda+i)^5 \Rightarrow |1+i\lambda|^7=|\lambda+i|^5 \Leftrightarrow \ldots\lambda=0$ οπότε η προηγούμενη σχέση: $(1+i.0)^7=(0+i)^5 \Leftrightarrow 1=i^5$ άτοπο

Π.χ. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $|z_1|=1$ $|z_2|=2$, $|z_3|=4$ τότε να δείξετε ότι

α) $|z_1+z_2+z_3|\neq 0$ β) $8|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_3+4z_2z_3+16z_1z_2|$

α) Έστω $|z_1+z_2+z_3|=0$ τότε $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=-z_3 \Rightarrow |z_1+z_2|=|-z_3| \Leftrightarrow |z_1+z_2|=4$.

όμως από την τριγωνική ανισότητα: $|1-2|\leq |z_1+z_2|\leq 1+2$ δηλαδή $1\leq 4\leq 3$ Άτοπο.

β) $8|z_1+z_2+z_3|$ ισούται με το συζυγή κλπ.

Πάντα αντικατάσταση z= x+yi ;

Αν **$(u-1+2i)(2\bar{u}+2-4i)=4$** τότε βρείτε τον γ. τόπο των εικόνων του u

Είναι προτιμότερο να γράψουμε **$(u-1+2i)(2\bar{u}-2-4i)=4 \Leftrightarrow (u-1+2i)2(\bar{u}-1-2i)=4 \Leftrightarrow$**

$(u-1+2i)\left(\overline{u-1+2i}\right)=2 \Leftrightarrow |u-1+2i|^2=2 \Leftrightarrow |u-1+2i|=$ $\sqrt{2}$ άρα ο γ. τόπος των εικόνων του u είναι…………

Μιγαδικοί και τρίγωνα

Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 έχουν εικόνες Α,Β,Γ τότε
α) για να δείξω τρ. ΑΒΓ ισόπλευρο αρκεί ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ αρκεί
$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=|z_2-z_3|$
διότι $|z_1-z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 ,z_2 δηλαδή την ΑΒ
β} για να δείξω τρ. ΟΑΒ ισοσκελές αρκεί $|z_1|=|z_2|$
γ) για να δείξω τρ. ΟΑΒ ισόπλευρο αρκεί $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$
δ) για να δείξω τρ. ΑΒΓ ορθογώνιο αρκεί $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2 \Leftrightarrow |z_2-z_3|^2=|z_1-z_2|^2+|z_1-z_3|^2$

Τρόποι αντιμετώπισης ότι ο μιγαδικός z είναι πραγματικός

1) Πράξεις
   πχ. $z=2(1+i)/(1-i)-2i+6=...6$
2) $z=\bar{u}+u=2Re(u)$ που είναι πραγματικός

   πχ. $z=(1+2i)^{2013}+(1-2i)^{2013}=\ldots$

3) $z=\bar{u}.u=|u|^2$ που είναι πραγματικός
   π.χ. $z=\left(\dfrac{1-i}{3+i}\right)^{20}\left(\dfrac{1+i}{3-i}\right)^{20}=\ldots.$
4) Αν $u^2=|u|^2$, αφού τότε $u^2=\bar{u}.u \Leftrightarrow u(\bar{u}-u)=0 \Leftrightarrow u=0$ ή $\bar{u}=u$ δηλαδή u πραγματικός.
5) Όταν διαπιστώνουμε ότι η εικόνα του μιγαδικού βρίσκεται στον άξονα του χ'χ π.χ. $|z-2-3i|=|z-2+3i|$ αντί να κάνουμε τις πράξεις μπορούμε να πούμε ότι η παραπάνω σχέση σημαίνει:
   Η απόσταση της εικόνας του z από το Α(2,3) ισούται απόσταση της εικόνας του z από το Β(2,-3). Επειδή τώρα τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τον χ'χ

τότε οι εικόνες του z ανήκουν στον χ'χ.
Γενικότερα αυτό συμβαίνει για σχέσεις της μορφής:
$|z-u|=|z-\bar{u}|$

<u>Μια ιστορία με γ. τόπους</u>

Α. ΕΥΘΕΙΑ

Έστω $w=\lambda-1+\lambda i$, λ πραγματικός. Είναι φανερό ότι για τις τιμές του λ δημιουργούνται άπειρες εικόνες του μιγαδικού w. Πώς μπορούμε να μάθουμε που ανήκουν αυτές;
Με το λογισμικό geogebra δημιουργούμε δρομέα λ, στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A=(\lambda-1,\lambda)$ για την εικόνα του w. Κινώντας το δρομέα βλέπουμε την κίνηση του Α. Εναλλακτικά βρίσκουμε το εργαλείο Γ.τόπος, κάνουμε κλίκ στο σημείο Α και μετά στον δρομέα. Το αποτέλεσμα θα είναι μια ευθεία.
Πως βρίσκουμε με τα Μαθηματικά αυτή την ευθεία;
Στα Μαθηματικά βασιζόμαστε στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων επομένως, μια ευθεία , γενικά μια καμπύλη είναι μια σχέση μεταξύ χ,ψ
Αν $w=\chi+\psi i$, τότε έχουμε $\chi=\lambda-1$, $\psi=\lambda$, απαλείφουμε το λ και παίρνουμε $\psi=\chi+1$
Άρα οι εικόνες του μιγαδικού w σχηματίζουν την ευθεία $\psi=\chi+1$

<u>Που ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού $\bar{w}$;</u>

Οι συζυγείς μιγαδικοί έχουν σχέση συμμετρίας ως προς τον άξονα χ'χ (ίδια χ αντίθετα ψ). Επομένως οι εικόνες του μιγαδικού $\bar{w}$; Ανήκουν στην συμμετρική της $\psi=\chi+1$ ως προς τον άξονα χ'χ, δηλαδή στην ευθεία $\psi=-\chi-1$

<u>Που ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού $-\bar{w}$;</u>

…

<u>Που ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού –w;</u>

…

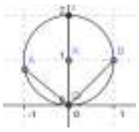
Β. ΚΥΚΛΟΣ

Έστω $u=\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta$, θεR τότε εργαζόμενοι με την ίδια λογική βρίσκουμε τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=1$
Οι εικόνες του συζυγούς του u ανήκουν στον ίδιο κύκλο.
Αυτό φαίνεται και ως εξής: $\chi^2+\psi^2=1 \Leftrightarrow |u|=1 \Leftrightarrow |\bar{u}|=1$
Ένας καλός τρόπος λοιπόν είναι το μέτρο και οι ιδιότητές του.
Έτσι αν $|u-5|=4 \Leftrightarrow |\bar{u}-5|=4$ άρα οι εικόνες των $\bar{u}$, u ανήκουν στον ίδιο κύκλο.
Όμως αν $|u-5i|=4 \Leftrightarrow |\bar{u}+5i|=4$ άρα οι εικόνες των $\bar{u}$, u δεν ανήκουν στον ίδιο κύκλο

<u>Μια ιστορία με γ. τόπους και μέγιστα-ελάχιστα</u>

Δίνεται ο μιγαδικός z με **|z-i|=1**, να βρείτε Μέγιστη-Ελάχιστη τιμή για:
α) το μέτρο του, β) $|z_1-z_2|$, όπου z_1,z_2 μιγαδικοί που ικανοποιούν την **|z-i|=1**
γ) |z+1+i|
Γεωμετρική λύση

|z-i|=1 σημαίνει η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο κέντρου (0,1) και ακτίνας ρ=1

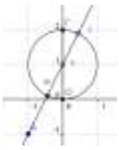


α) Σκεφτόμαστε να βρούμε σημεία πάνω στον κύκλο που οι αποστάσεις τους από το Ο (μέτρα) να είναι οι μέγιστες –ελάχιστες δυνατές. Αυτά είναι τα σημεία Γ και Ο και αφορούν τους μιγαδικούς z=2i , z=0 αντίστοιχα

β) Αν Α, Β οι εικόνες των z_1,z_2 τότε $|z_1-z_2|$=ΑΒ, οπότε μέγιστο έχουμε όταν ΑΒ είναι διάμετρος στον κύκλο, άρα Μέγιστο το 2 και αφορά μιγαδικούς που οι εικόνες τους είναι αντιδιαμετρικά σημεία στον κύκλο.
Ελάχιστο έχουμε όταν Α,Β συμπίπτουν και είναι 0 . Αφορά που οι εικόνες τους είναι στον κύκλο και ταυτίζονται.

γ) Μπορεί να μοιάζει αλλά **|z+1+i|** δεν είναι κύκλος αλλά η απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα του -1-i. Φέρνουμε την διακεντρική ΔΚ , βρίσκουμε ΔΚ=

$$\sqrt{(-1-0)^2+(-1--1)^2}=\sqrt{5}$$



οπότε Μέγιστο το ΔΖ=$\sqrt{5}$+1, Ελάχιστο το ΔΗ=$\sqrt{5}$-1

Αν η άσκηση ζητούσε και τους αντίστοιχους μιγαδικούς τότε αυτοί θα ήταν λύσεις του συστήματος
ευθεία ΔΚ:**ψ=2χ+1** και του κύκλου **$χ^2+(ψ-1)^2=1$**

Επίλυση με την τριγωνική ανισότητα

α) |z|=|z-i+i|

οπότε $\big||z-i|-|i|\big|\leq|z|\leq|z-i|+|i|$ οπότε $0\leq|z|\leq2$

β) $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ **οπότε** $0\leq|z_1-z_2|\leq2+2=4$ που φαινομενικά δίνει λάθος αποτέλεσμα, όμως είναι μια σωστή ανισοτική σχέση

γ) |z+1+i|=|z-i+1+2i| οπότε

$\big||z-i|-|1+2i|\big|\leq|z+1+i|\leq|z-i|+|1+2i|$ οπότε $\sqrt{5}-1\leq$ **|z+1+i|** $\leq\sqrt{5}+1$

Οι παραπάνω τρόποι για τα α-γ ερωτήματα είναι ελλιπείς καθώς δίνει νόνο ανισοτικές σχέσεις (άνω φράγματα) χωρίς να εξασφαλίζει την ύπαρξη μέγιστου-ελάχιστου.
Οι παραπάνω τρόποι θα ήταν σωστοί αν η άσκηση ζητούσε μόνο ανισοτικές σχέσεις και όχι μέγιστη-ελάχιστη τιμή.

Ας επεκτείνουμε τώρα την άσκηση δίνοντας επιπλέον ερωτήματα

Δίνεται ο μιγαδικός z με **|z-i|=1,**

Α. Να βρείτε Μέγιστη-Ελάχιστη τιμή για:

α) το μέτρο του, β) $|z_1-z_2|$, όπου z_1,z_2 μιγαδικοί που ικανοποιούν την **|z-i|=1**

γ) |z+1+i|

Β. Δίνεται ο μιγαδικός w που η εικόνα του ανήκει :
α) στην $\boldsymbol{\psi=\chi-1}$ β) στην $\boldsymbol{\psi=1}$ γ) στον κύκλο $\boldsymbol{\chi^2+\psi^2=1}$
Να βρείτε (όπου υπάρχει) την Μέγιστη-Ελάχιστη τιμή του **|z-w|**

Γεωμετρική λύση

|z-w| είναι η απόσταση των εικόνων των z,w

Φέρνουμε την ΚΛ κάθετη στην $y=x-1$, η ΚΛ είναι η ελάχιστη απόσταση και χρησιμοποιώντας απόσταση σημείου από ευθεία βρίσκουμε ΚΛ=$\sqrt{2}$, οπότε η ελάχιστη τιμή είναι ΒΛ=$\sqrt{2}$ -1
Μέγιστη απόσταση δεν υπάρχει αφού η εικόνα του w είναι πάνω στην ευθεία.
Αν θέλουμε να βρούμε ποιος μιγαδικός αντιστοιχεί στο Β τότε πρέπει να λύσουμε το σύστημα της ευθείας ΚΛ και του κύκλου
Για το β) ελάχιστο….=0
Για το γ) σχεδιάζουμε και τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=1$
Μέγιστο=……… 3, ελάχιστο=……1