

ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ

6/12/2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ -ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: ΠΙΣΤΟΦΙΔΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

Θέμα 1

Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + a \cdot |hmx|}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}$$

Λύση

Για να υπάρχει το δοθέν όριο πρέπει και αρκεί

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + a \cdot |hmx|}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + a \cdot |hmx|}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{x^2(x^2 + 1)} + a \cdot (-hmx))(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2(x^2 + 1)} + a \cdot hmx)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x^2 + x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x\sqrt{x^2 + 1} - a \cdot hmx)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x(x + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x\sqrt{x^2 + 1} + a \cdot hmx)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x(x + 1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(-\sqrt{x^2 + 1} - a \cdot \frac{hmx}{x}\right)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} + a \cdot \frac{hmx}{x}\right)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x + 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-1 - a) \cdot 2 = (1 + a) \cdot 2 &\Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

Θέμα 2

Να βρεθούν οι αριθμοί $m, n \in \mathbb{Z}$ αν

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^n (\sqrt{x^2 + x + 1} - m) \right) \in \mathbb{R}^*$$

Λύση

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^v = \begin{cases} +\infty & , \alpha\nu \ v < 0 \\ 1 & , \alpha\nu \ v = 0 \\ 0 & , \alpha\nu \ v > 0 \end{cases}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + x + 1} - m) = 1 - m$$

προκύπτουν οι κάτωθι παραδεκτές τιμές των μ, ν :

- $\nu = 0$, $m \neq 1$
- $\nu < 0$, $m = 1$: τότε το δοθέν όριο γράφεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\nu (\sqrt{x^2 + x + 1} - 1)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^\nu \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\nu+1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\nu+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\nu+1} \end{aligned}$$

Για να είναι το όριο αυτό μη μηδενικός πραγματικός αριθμός θα πρέπει: $\nu = -1$ οπότε παραδεκτό ζεύγος τιμών $\nu = -1$, $m = 1$

Θέμα 3

Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x_0) = h(x_0) = \ell$

(3) f, h συνεχείς στο x_0

Δείξτε ότι η g είναι συνεχής στο x_0

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{(3)}{=} f(x_0) \stackrel{(2)}{=} \ell$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \stackrel{(3)}{=} h(x_0) \stackrel{(2)}{=} \ell$$

άρα λόγω της (1) και του κριτηρίου παρεμβολής θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \quad (\text{I})$$

Η σχέση (1) της υπόθεσης για $x = x_0$ δίνει:

$$f(x_0) \leq g(x_0) \leq h(x_0) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \ell \leq g(x_0) \leq \ell$$

$$\Rightarrow g(x_0) = \ell \quad (\text{II})$$

Από τις (I) και (II) έπεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

δηλαδή η g είναι συνεχής στο x_0

Θέμα 4

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε:

(1) $f(1) = 2$

(2) $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = 8, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (1, 2): f(x_0) = 3$

Λύση

Η σχέση (2) της υπόθεσης για $x=1$ δίνει:

$$f(1) \cdot (f \circ f)(1) = 8 \Rightarrow f(1) \cdot f(f(1)) = 8$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2 \cdot f(2) = 8$$

$$\Rightarrow f(2) = 4$$

Για την f λοιπόν παρατηρούμε ότι:

- f συνεχής στο $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$
- $f(1) \neq f(2)$

Άρα λόγω του θ. ενδιαμέσων τιμών, για οποιοδήποτε αριθμό μεταξύ των $f(1)$ και $f(2)$ - άρα και για τον αριθμό 3 - $\exists x_0 \in (1, 2): f(x_0) = 3$

Σχόλιο : Είναι βέβαια προφανές ότι η ύπαρξη $x_0 \in (1, 2): f(x_0) = 3$ μπορεί να προέλθει και από εφαρμογή του θ. Bolzano για την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$ στο διάστημα $[1, 2]$