ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ

14.2.05

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΘΟΔΩΡΗΣ

Θέμα 1ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ ώστε να ισχύει

$$2\left(e^{f(x_1)}-e^{f(x_2)}\right)=\left(f(x_1)+f(x_2)+2\right)\left(f(x_1)-f(x_2)\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $e^{f(x_0)}=f(x_0)+1$

β) Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $e^{f(x)}\geq f(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Έχουμε $2\left(e^{f(x_1)}-e^{f(x_2)}\right)=\left(f(x_1)+f(x_2)+2\right)\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\Leftrightarrow$

$$2e^{f(x_1)}-2e^{f(x_2)}=\left[f(x_1)\right]^2-\cancel{f(x_1)f(x_2)}+\cancel{f(x_1)f(x_2)}-\left[f(x_2)\right]^2+2f(x_1)-2f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x_2)\right]^2+2f(x_2)-2e^{f(x_2)}=\left[f(x_1)\right]^2+2f(x_1)-2e^{f(x_1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left[f(x)\right]^2+2f(x)-2e^{f(x)}$

Η g είναι :

- συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $g'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)-2e^{f(x)}\cdot f'(x)$
- $g(x_1)=g(x_2)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε να ισχύει

$$g'(x_0)=0\Leftrightarrow 2f(x_0)\cdot f'(x_0)+2f'(x_0)-2e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)=0\overset{f'(x_0)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$2f(x_0)+2-2e^{f(x_0)}=0\Leftrightarrow e^{f(x_0)}=f(x_0)+1$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}-f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{f(x)}-f(x)-1\geq 0\overset{(a)}{\Leftrightarrow}e^{f(x)}-f(x)-1\geq e^{f(x_0)}-f(x_0)-1\Leftrightarrow h(x)\geq h(x_0)$$

Δείγμα

άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 οπότε θα ισχύει $h'(x_0)=0$ (Θεώρημα Fermat)

Όμως $h'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)-f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $h'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)-f'(x_0)=0 \overset{f'(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{f(x_0)}-1=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$

δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα . Έστω ότι η f έχει και δεύτερη ρίζα $\rho\neq x_0$ και ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι: $\rho<x_0$. Τότε για την f διαπιστώνουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ συνεχης στο } [\rho,x_0]\\ \bullet\ f \text{ παραγωγισιμη στο } (\rho,x_0)\\ \bullet\ f(\rho)=f(x_0)=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{θ. Rolle}} \text{υπάρχει } \xi\in(\rho,x_0)\subseteq\mathbb{R}: f'(\xi)=0$$

Άτοπο από την υπόθεση . Άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x(e^x+1)}{e^x}$

α) Να αποδείξετε ότι παρουσιάζει σημείο καμπής
β) να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα
γ) να βρείτε τις ασύμπτωτες της c_f

Λύση

α) Έχουμε $f'(x)=\dfrac{(e^x+1+xe^x)e^x-e^x\cdot x\cdot(e^x+1)}{(e^x)^2}=e^x\cdot\dfrac{e^x+1+xe^x-xe^x-x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x+1-x}{e^x}$

και $f''(x)=\dfrac{(e^x-1)e^x-e^x(e^x+1-x)}{(e^x)^2}=e^x\dfrac{e^x-1-e^x-1+x}{(e^x)^2}=\dfrac{x-2}{e^x}$

Έτσι $f''(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Είναι $f(2)=\dfrac{2(e^2+1)}{e^2}$

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A=\left(2,\dfrac{2(e^2+1)}{e^2}\right)$

β)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	ολ.ελ.	$\nearrow$

Άρα η f ΄παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, δηλαδή

$f'(x)\geq f'(2)=\dfrac{e^2+1-2}{e^2}=\dfrac{e^2-1}{e^2}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Υπόδειγμα

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=1$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x(e^x+1)}{e^x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\dfrac{e^x+1-e^x}{e^x}\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Δηλαδή η συνάρτηση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$.

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$.

Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Θέμα 3ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$-x^3-x+1\le f(x)\le -x^3+x^2-x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=-1$

γ) Αν είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

α). Στη σχέση της υπόθεσης θέτοντας $x=0$ παίρνουμε $1\le f(0)\le 1$, άρα $f(0)=1$

β) Έχουμε $-x^3-x+1\le f(x)\le -x^3+x^2-x+1 \Leftrightarrow -x^3-x\le f(x)-1\le x^3+x^2-x$

$$\Leftrightarrow -x^3-x\le f(x)-f(0)\le -x^3+x^2-x \qquad (1)$$

- για $x>0$ η (1) γίνεται: $-x^2-1\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le -x^2+x-1$

  Όμως $\lim\limits_{x\to0^+}(-x^2-1)=\lim\limits_{x\to0^+}(-x^2+x-1)=-1$ οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι και

  $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$$

- για $x<0$ η σχέση (1) γίνεται

  $$-x^2-1\ge\frac{f(x)-f(0)}{x}\ge -x^2+x-1$$

  Όμως $\lim\limits_{x\to0^-}(-x^2-1)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x^2+x-1)=-1$ οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι και

  $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$$

  Δηλαδή $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-1$

Άρα $f'(0)=-1$

γ) Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη η f' θα είναι συνεχής.

Επίσης ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η f' θα διατηρεί το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$ και εφόσον $f'(0)=-1$ θα είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Πανόρεμο