ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο σημείο x_0. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(μονάδες 7)

Β. Η συνάρτηση $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x-1$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x-1}{f(x)}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-2x]$ **iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(μονάδες 8)

Γ. i. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Να αποδείξετε ότι η f είναι και συνεχής στο σημείο x_0. *(μονάδες 3)*

ii. Με κατάλληλο παράδειγμα να εξηγήσετε γιατί δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος. *(μονάδες 3)*

iii. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση:

$$f(x)=\int_{-2}^{x+3}\sqrt{t^2-1}\,dt$$

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω ο μιγαδικός z. Να αποδείξετε ότι $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=z$. *(μονάδες 3)*

Β. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για το μιγαδικό z με $\mathrm{Im}(z)\neq0$ ισχύουν:

$$z+\frac{1}{z}=f(\alpha) \text{ και } z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$$

όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Να αποδείξετε ότι:

α. i. Η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα $\rho=1$. *(μονάδες 8)*

ii. $f^2(\beta)=f^2(\alpha)-2$ *(μονάδες 5)*

β. Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha, \beta)$, ώστε $(\alpha-\beta)f(\xi)f'(\xi)=1$

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha<0<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία x_1, x_2 με $x_1\neq x_2$, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. *(μονάδες 8)*

ii. υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_3 \in \mathbb{R}$, ώστε $f''(x_3)=0$.

(μονάδες 5)

iii. Η εξίσωση $f(x)+f'(x)f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

(μονάδες 5)

iv. Η εξίσωση $f''(x)+[f'(x)]^2=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $\Delta=(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $f(x) \neq 1$ και

$$f(x)=\frac{1}{2}+\int_{x}^{x^2}\frac{1}{x}[1-f(\tfrac{t}{x})]^2dt \qquad \text{για κάθε } x>0$$

και η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{1}{f(x)-1}+x, \quad x>0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. *(μονάδες 10)*

ii. Η g είναι σταθερή στο Δ. *(μονάδες 5)*

iii. Ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x>0$ και βρείτε το σύνολο τιμών της $f(\Delta)$.

(μονάδες 7)

iv. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(x+1)}$ *(μονάδες 5)*

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i. Έστω συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Αν F(x) είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι όλες οι παράγουσες της f στο Δ είναι της μορφής: $\mathbf{G(x)=F(x)+c}$ *(μονάδες 6)*

ii. Να αποδείξετε ότι

α) $\int xg''(x)dx = xg'(x) - g(x) + c$

β) $\int_0^{\alpha} g(\alpha-x)dx=\int_0^{\alpha} g(x)dx$

με την υπόθεση ότι $\alpha \in \mathbb{R}$ και g τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(μονάδες 6)

Β. i. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ με $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ. *(μονάδες 5)*

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. *(μονάδες 5)*

iii. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ; *(μονάδες 3)*

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2) με παράγωγο γνησίως αυξούσα στο (1, 2) .
Αν $f(1) = f(2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. *(μονάδες 8)*

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = \xi$. *(μονάδες 9)*

iii. Ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. *(μονάδες 8)*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z) = \dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z \neq 1$

α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού f(2). *(μονάδες 3)*

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = [f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός. *(μονάδες 5)*

γ) Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = |z|$. *(μονάδες 8)*

δ) Αν $|z| = 1$ και M είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
(Θέμα Προσομοίωσης 2001) *(μονάδες 9)*

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η ισότητα

$$\int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η τιμή της f στο $x_0=0$ είναι $f(0) = 0$. *(μονάδες 3)*

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. *(μονάδες 7)*

β) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση

$$\int_{(fof)(3\kappa)}^{(fof)(\kappa^2+2)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt > 0.$$

(μονάδες 5)

γ) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.
(μονάδες 10)

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i) Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

β) $\overline{z_1 + z_2} = z_1 + z_2$

(μονάδες 7)

ii) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Έστω z_1, z_2 δύο μιγαδικοί. Αν $|z_1| = |z_2|$ τότε $z_1 = \pm z_2$

β) Αν οι αριθμοί κ, λ είναι θετικοί ακέραιοι, τότε ισχύει πάντοτε η ισοδυναμία:

$$i^{\kappa} = i^{\lambda} \Leftrightarrow \kappa = \lambda$$

γ) Το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει σχέση: $|z+3i| = |2+3i|$ είναι κύκλος.

(μονάδες 6)

Β. i) Έστω συνάρτηση f, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

(μονάδες 6)

ii) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [1, 2] με $f(1) = 3$ και $f(2) = 5$ τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(x_0)=0$.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2ο

Η συνάρτηση f με

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R}$$

όπου τα α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν ακριβώς δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ξ_1, ξ_2 στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. *(μονάδες 8)*

β) Ισχύει $\alpha^2 > 3\beta$. *(μονάδες 5)*

γ) Για τα ξ_1, ξ_2 είναι $f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = 0$. *(μονάδες 5)*

δ) Η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής του οποίου η τετμημένη βρίσκεται μεταξύ των ξ_1, ξ_2. *(μονάδες 7)*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \frac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{}$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός με $z = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. *(μονάδες 8)*

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f, εάν $|z+1|>|z-1|$. *(μονάδες 9)*

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της.
(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων Ιούλιος 2002) *(μονάδες 8)*

ΘΕΜΑ 4ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x + 2$$ *(μονάδες 7)*

ii) Η f αντιστρέφεται με αντίστροφη

$$f^{-1}(x)= x^3 + x - 2, \ x\in\mathbb{R}$$ *(μονάδες 4)*

iii) Η τιμή της f στο $x_0 = -2$ είναι $f(-2) = 0$. *(μονάδες 2)*

Β. Να βρείτε τα σημεία καμπής της f. *(μονάδες 5)*

Γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και τη γραμμή $x = -2$.
(μονάδες 7)