ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 1ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. *i.* Θεωρία *ii.* Θεωρία *iii.* **α)** Σωστό, **β)** Λάθος

Β. *i.* Θεωρία *ii.* Θεωρία

Γ. Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

α) για $x=1$ είναι: $g(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$ και

$$\varphi(1) = f(g(1)) = f(1) = 1.$$

Επίσης για κάθε $x>0$ είναι: $g'(x) = (\ln x + x)' = \frac{1}{x} + 1$, οπότε

$g'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$. Τέλος η $\varphi(x)=f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με : $\varphi'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ οπότε: $\varphi'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

β) Είναι: $g'(x) = \frac{1}{x} + 1>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

γ) $$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1) + (h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = g'(1) = 1$$

δ) *i.* Η εφαπτομένη της C_φ στο σημείο $A(1,1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\varphi'(1)=2$, οπότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = 2x + \beta_1$. Αφού διέρχεται από το $A(1,1)$ θα είναι:
$1 = 2 \cdot 1 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = -1$.
Επομένως η εξίσωσή της είναι: $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$
Αν τώρα $\lambda_2=f'(1)=1$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_2 της C_f στο $B(1, 1)$, τότε η ε_2 έχει εξίσωση της μορφής $y=x+\beta_2$. Η ισότητα αυτή για $x=1$, $y=1$ δίνει $\beta_2=0$.
Επομένως η εξίσωση της ε_2 είναι: $\varepsilon_2 : y = x$

ii. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ε_2: $y=x$ με τον $x'x$.
Τότε $\varepsilon\varphi\omega = 1$ οπότε $\omega= \frac{\pi}{4}$

ΘΕΜΑ 3ο

i. Έστω $P(A - B) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0{,}2$
$\Leftrightarrow 0{,}7 - P(A\cap B) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(A\cap B) = 0{,}5$
που είναι άτοπο γιατί είναι: $(A\cap B) \subseteq B$, οπότε $P(A\cap B)\leq P(B) = 0{,}4$

Έστω $P(A - B) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0{,}7$
$\Leftrightarrow 0{,}7 - P(A \cap B) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$
$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0$
$\Leftrightarrow 0{,}7 + 0{,}4 - P(A \cup B) = 0$
$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1{,}1 >1$ άτοπο.
Επομένως: $P(A - B) = 0{,}4$

ii. Αφού $P(A - B) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4$
$\Leftrightarrow 0{,}7 - P(A \cap B) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(A \cap B) =0{,}3$

και $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}8$

$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

ΘΕΜΑ 4ο

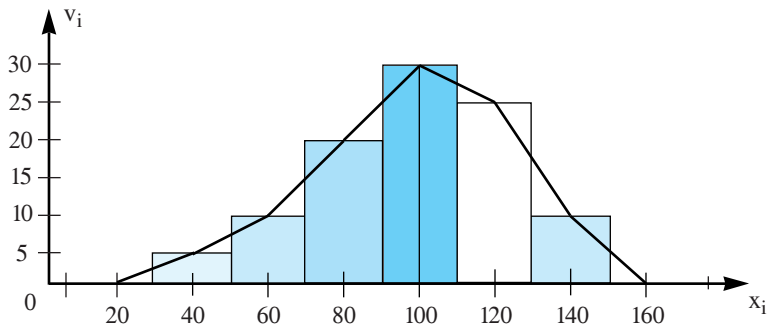
Είναι γνωστό ότι:

- Τα εμβαδά των ιστίων είναι ίσα με τις συχνότητες των αντίστοιχων κλάσεων.
- Το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει το πολύγωνο συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα δίνει το μέγεθος του δείγματος.

α) Επειδή το 100 είναι το κέντρο της κλάσης [90, 110] έχουμε:
$5 + 10 + 20 + 15 = 15 + \nu_5 + 10 \Leftrightarrow \nu_5 = 25$

β) $\nu = 5 + 10 + 20 + 30 + 25 + 10 = 100$

γ) $\delta = 100$, γιατί προφανώς έχει αθροιστική συχνότητα 50%



$$\bar{x} = \frac{40\cdot5 + 60\cdot10 + 80\cdot20 + 100\cdot30 + 120\cdot25 + 140\cdot10}{100} = 98$$

δ) Το διάστημα [70, 90) περιλαμβάνει το 20% του δείγματος, έτσι στην περιοχή 70 – 72 περιλαμβάνεται το $\frac{2\cdot20}{20}\% = 2\%$ και το ζητούμενο ποσοστό είναι $(5 + 10 + 2)\% = 17\%$ (ή με πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων)

ε) Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. ***i.*** Θεωρία.

ii. **α)** $P(A \cap B) \le P(A)$

β) $P(A \cup B) \ge P(B)$

γ) $P(A - B) \le P(A)$

δ) $P(B - A) \le P(A \cup B)$

B. ***i.*** Θεωρία ***ii.*** Θεωρία ***iii.*** το γ ***iv.*** Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

i. Είναι: $f'(x) = [x^2 + (1 - x)^2]' = 2x + 2(1 - x)(1 - x)' = 2x - 2(1 - x) = 2(2x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ με τη μονοτονία και τα ακρότατα της $f(x)$

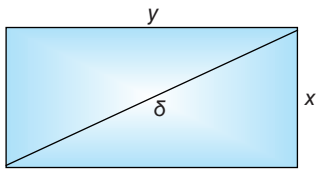
φαίνονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	

άρα για $x = \frac{1}{2}$ έχει ελάχιστο, με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ii. Έστω $x>0$ και $y>0$ οι πλευρές του ορθογωνίου. Η περίμετρος είναι $2x + 2y = 2 \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$.
Τότε για τη διαγώνιο $\delta>0$ είναι:
$\delta^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \delta^2 = x^2 + (1 - x)^2,\ x>0$
Από το *i)* είναι $\delta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ και



το "=" ισχύει για $x = \frac{1}{2}$.

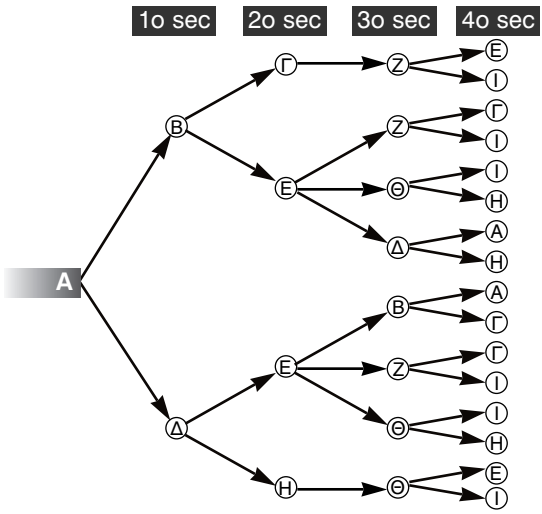
Έτσι η ελάχιστη τιμή της διαγωνίου δ είναι $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

iii. Γνωρίζουμε ότι $P(A') = 1 - P(A)$ οπότε:
$[P(A)]^2 + [P(A')]^2 = [P(A)]^2 + [1 - P(A)]^2$.

Από το *i)* για $x=P(A)$ έχουμε: $[P(A)]^2 + [1 - P(A)]^2 \geq \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 2ο

i.



Ω = {ΑΒΓΖΕ, ΑΒΓΖΙ, ΑΒΕΖΓ, ΑΒΕΖΙ, ΑΒΕΘΙ, ΑΒΕΘΗ, ΑΒΕΔΑ, ΑΒΕΔΗ, ΑΔΕΒΑ, ΑΔΕΒΓ, ΑΔΕΖΓ, ΑΔΕΖΙ, ΑΔΕΘΙ, ΑΔΕΘΗ, ΑΔΗΘΕ, ΑΔΗΘΙ}

ii. Είναι $N(\Omega) = 16$ και

$A = \{ΑΒΕΔΑ, ΑΔΕΒΑ\}$ *με* $N(A)=2$ *οπότε* $P(A)= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ ή 12,5%

$B = \{ΑΒΓΖΙ, ΑΔΗΘΙ\}$ *με* $N(B)=2$ *οπότε* $P(B)= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ ή 12,5%

$Γ = \{ΑΒΓΖΕ, ΑΒΓΖΙ, ΑΒΕΖΓ, ΑΒΕΖΙ, ΑΔΕΖΓ, ΑΔΕΖΙ\}$

με $N(Γ)=6$ *οπότε* $P(Γ)= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ ή 37,5%

$Δ = \varnothing$ οπότε $P(Δ) = 0$

Παρατήρηση: Για το ενδεχόμενο Γ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ως δειγμ. χώρο το:

$\Omega=\{ΑΒΓΖ, ΑΒΕΖ, ΑΒΕΘ, ΑΒΕΔ, ΑΔΕΒ, ΑΔΕΖ, ΑΔΕΘ, ΑΔΗΘ\}$

και ευνοϊκές περιπτώσεις $Γ = \{ΑΒΓΖ, ΑΒΕΖ, ΑΔΕΖ\}$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Η δοσμένη ισότητα για $i=\kappa$ δίνει:

$F_\kappa^2 + (1 - F_\kappa)^2 = \frac{N_\kappa^2 - 10N_\kappa + \alpha}{\alpha}$, και επειδή $F_\kappa=1$, $N_\kappa=v$ προκύπτει

$1 = \frac{v^2 - 10v + \alpha}{\alpha} \Leftrightarrow v = 10$ ή ($v = 0$ αδύνατο)

β) ***i.*** Ο τύπος $S^2= \frac{1}{v}\cdot\left[\sum x_i^2 v_i - \frac{(\Sigma x_i v_i)^2}{v}\right]$ για $v = 10$ και

$(\sum x_i v_i)^2 = 10 \sum x_i^2 v_i$ δίνει $S^2= \frac{1}{10}\cdot\left[\sum x_i^2 v_i - \frac{10 \cdot \Sigma x_i^2 v_i}{10}\right] = 0$

άρα $S = 0$.

ii. Είναι $S^2 = \frac{1}{v}\cdot \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 v_i = 0$, οπότε $\sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 v_i = 0$ ή

$(x_1 - \bar{x})^2\cdot v_1 + (x_2 - \bar{x})^2\cdot v_2 + ... + (x_\kappa - \bar{x})^2\cdot v_\kappa = 0.$

Επειδή το άθροισμα μη αρνητικών όρων ισούται με μηδέν, είναι:

$(x_1 - \bar{x})^2\cdot v_1 = 0$ και $(x_2 - \bar{x})^2\cdot v_2 = 0$ και ... $(x_\kappa - \bar{x})^2\cdot v_\kappa = 0$

Άρα: $x_1 = x_2 = ... = x_\kappa = \bar{x}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 3ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. ***i.*** Θεωρία

ii. Λ–Σ–Σ–Λ

Β. ***(i)*** ***(ii)*** Θεωρία

iii. **α.** το Ε **β.** το Α

γ. το Γ **δ.** το Γ

ε. το Α

ΘΕΜΑ 2ο

i) Είναι $v_3= \frac{50}{100}\cdot 800 = 400$

$$v_2 = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 800 = 160$$

$$v_1 = 800 - 160 - 400 - 160 = 80$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία συμπληρώνονται εύκολα:

αριθμός παιδιών	πλήθος οικογενειών	Σχετική συχνότητα f_i	Επίκεντρη γωνία α_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική αθροιστική συχνότητα F_i%
0	80	0,10	36°	80	10%
1	160	0.20	**72°**	240	30%
2	400	**0,50**	180°	640	80%
3	**160**	0.20	72°	800	100%
Σύνολα	**800**	**1,00**	**360°**	–	–

ii. $\bar{x} = \frac{80\cdot 0+160\cdot 1+400\cdot 2+160\cdot 3}{800} = 1{,}8$ και $\delta = \frac{t_{400}+t_{401}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

iii. Είναι: $P(A)=f_3+f_4=0{,}7$ ή 70% και $P(B)=f_1+f_2+f_3=0{,}8$ ή 80%

iv. Είναι: $N(\Omega)=0\cdot 80+1\cdot 160+2\cdot 400+3\cdot 160=1440$ (πλήθος παιδιών)

- Το ενδεχόμενο Γ περιέχει όλα τα παιδιά των οποίων η οικογένεια έχει δύο παιδιά, οπότε:
  $N(\Gamma)=400\cdot 2=800$ και $P(\Gamma)=\frac{800}{1440}=\frac{5}{9}\approx 0{,}556$.

- Το ενδεχόμενο Δ περιέχει όλα τα παιδιά των οποίων η οικογένεια έχει τουλάχιστον δύο παιδιά, οπότε:
  $N(\Delta)=400\cdot 2+160\cdot 3=1280$ και $P(\Delta)=\frac{1280}{1440}=\frac{8}{9}\approx 0{,}889$.

- Το ενδεχόμενο Ε περιέχει όλα τα παιδιά των οποίων η οικογένεια έχει το πολύ δύο παιδιά, οπότε:
  $N(E)=80\cdot 0+160\cdot 1+400\cdot 2=960$ και $P(E)=\frac{960}{1440}=\frac{2}{3}\approx 0{,}667$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}>0$ για $x>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Ζητάμε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η $f'(x_0)=\frac{1}{2}$.

Είναι: $f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2<0$

άρα, $x_0=1$, έτσι $A(1, -\ell n2)$

γ. Πρέπει $P(2)+P(3)+P(4)+\ldots+P(\nu)=1$

ή $\frac{22}{9}\left[f'(2)+f'(3)+f'(4)+\ldots+f'(\nu)\right]=1$

ή $\frac{22}{9}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)\right]=1$

ή $\frac{22}{9}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu+1}\right]=1 \Leftrightarrow \nu=10$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Είναι $$S^2=\frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{v} t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right\}$$

$$\Leftrightarrow S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}$$

$$\Leftrightarrow S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_i^2-\overline{x}^2$$

Β. **α)** Είναι $CV_x=\frac{S}{|\overline{x}|}\Leftrightarrow\frac{S}{\overline{x}}=0{,}15$ *(1)*

Πριν ένα έτος οι ηλικίες ήταν: $y_1=t_1-1,\ y_2=t_2-1,\ \dots,\ y_v=t_v-1$ με τυπική απόκλιση $S_y=S$ και μέση τιμή $\overline{y}=\overline{x}-1$. Έτσι

$$CV_y=\frac{S}{\overline{x}-1}\Leftrightarrow\frac{S}{\overline{x}-1}=0{,}16 \qquad (2).$$

Οι *(1)* και *(2)* δίνουν $S=2{,}4$ και $\overline{x}=16$.

β) Μετά α έτη από σήμερα οι ηλικίες θα είναι:

$z_1=t_1+\alpha,\ z_2=t_2+\alpha,\ \dots,\ z_v=t_v+\alpha$

με τυπική απόκλιση $S_z=S_x=2{,}4$ και $\overline{z}=\overline{x}+\alpha\Leftrightarrow\overline{z}=16+\alpha$

$$CV_z\leqslant 0{,}1\Leftrightarrow\frac{2{,}4}{16+\alpha}\leqslant 0{,}1\Leftrightarrow\alpha\geqslant 8$$

γ) Επειδή $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} t_i^2-\overline{x}^2$ έχουμε $S^2=\frac{1}{v}(t_1^2+t_2^2+\dots+t_v^2)-\overline{x}^2$

$$\Leftrightarrow (2{,}4)^2=\frac{1}{v}26.176-16^2\Leftrightarrow v=100$$

δ) Η πραγματική μέση ηλικία είναι $\overline{x}_\pi=\frac{\sum_{i=1}^{v} t_i-17+15}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v} t_i}{v}-\frac{2}{v}$

$$=\overline{x}-\frac{2}{100}=16-0{,}02=15{,}98$$

και το πραγματικό άθροισμα τετραγώνων των ηλικιών είναι $26.176-17^2+15^2=26.112$, έτσι ο τύπος του Α ερωτήματος δίνει $S_\pi^2=\frac{1}{100}\cdot 26.112-(15{,}98)^2=5{,}7596$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 4ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) θεωρία, **β)** θεωρία, **γ)** θεωρία.
δ) ***i.*** το Γ ***ii.*** το Β

ΘΕΜΑ 2ο

	ΚΟΣΤΟΣ x_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
Α	14	10
Β	12	20
Γ	10	30
Δ	8	40

Έχουμε τον διπλανό πίνακα

α) Ο τύπος $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot f_i$ δίνει

$$\bar{x} = 14 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}4 = 10$$

β) $$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \frac{(14-10)^2 \cdot v_1 + (12-10)^2 \cdot v_2 + (10-10)^2 \cdot v_3 + (8-10)^2 \cdot v_4}{v}$$

$$= \frac{16v_2 + 4v_2 + 4v_4}{v} = \frac{16v_1}{v} + \frac{4v_1}{v} + \frac{4v_4}{v} = 16f_1 + 4f_2 + 4f_4$$

$$= 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 = 4$$

γ) Οι νέες τιμές του κόστους είναι:

$$y_1 = x_1 + \alpha, \quad y_2 = x_2 + \alpha, \quad y_3 = x_3 + \alpha, \quad y_4 = x_4 + \alpha$$

οπότε:

$\bar{y} = \bar{x} + \alpha \Leftrightarrow \bar{y} = 10 + \alpha$ και $S_y = S_x = \sqrt{4} = 2$

Πρέπει: $CVy \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{10+\alpha} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \alpha \ge 10$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $f(\alpha_1) = \lambda \cdot 2^0 = \lambda$, $f(A_2) = \lambda \cdot 2 = 2\lambda$, $f(\alpha_3) = \lambda \cdot 2^2 = 4\lambda, \ldots,$

έτσι $f(\alpha_3) = 4\lambda = \frac{4}{31} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{31}$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} f(\alpha_i) = 1 \Leftrightarrow \lambda(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{\kappa-1}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{31}(2^{\kappa} - 1) = 1 \Leftrightarrow 2^{\kappa} = 32 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

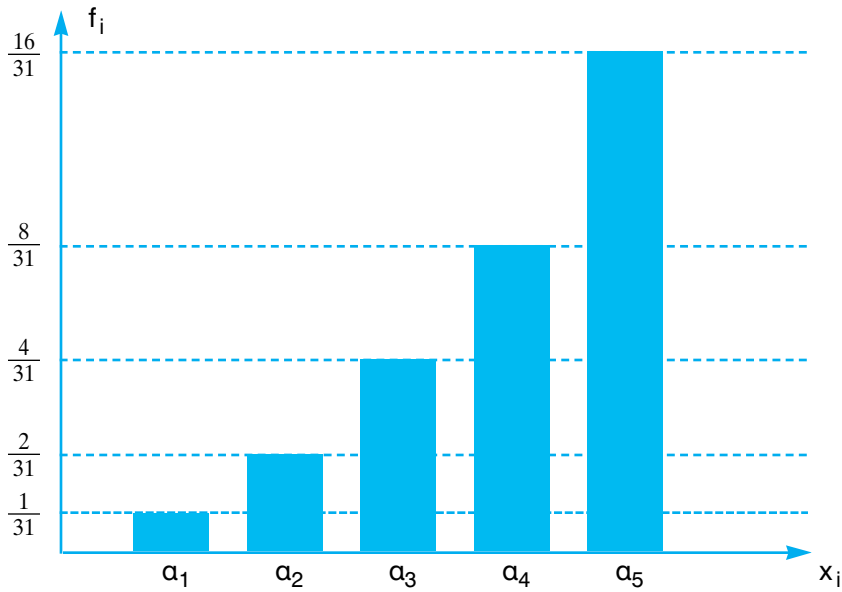
β) $P(A) = f(\alpha_4) = \frac{8}{31}$

$P(B) = f(\alpha_4) + f(\alpha_5) = \frac{24}{31}$

$P(\Gamma) = 1 - f(\alpha_1) = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$

γ) $f(\alpha_4) = \frac{8}{31} \Leftrightarrow \frac{160}{v} = \frac{8}{31} \Leftrightarrow v = 620$

δ) Το ζητούμενο ραβδόγραμμα είναι:



ΘΕΜΑ 4ο

Έστω τα ενδεχόμενα: R : "Να του αρέσει η Ρόδος"
Σ : "Να του αρέσει η Σαντορίνη"

Είναι: $P(R) = \frac{N(R)}{N(\Omega)} = \frac{56}{140} = 0{,}4$

$P(\Sigma) = \frac{N(\Sigma)}{N(\Omega)} = \frac{98}{140} = 0{,}7$

α) Είναι: $A = R \cap \Sigma$ Επειδή: $R \cap \Sigma \subseteq R \Rightarrow P(R \cap \Sigma) \leq P(R) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) = 0{,}4$ *(1)*

Ακόμα: $P(R \cup \Sigma) \leq 1 \Leftrightarrow P(R) + P(\Sigma) - P(R \cap \Sigma) \leq 1$
$\Leftrightarrow 1{,}1 - P(R \cap \Sigma) \leq 1$
$\Leftrightarrow P(R \cap \Sigma) \geq 0{,}1$
$\Leftrightarrow P(A) \geq 0{,}1$ *(2)*

Οι *(1)* και *(2)* δίνουν το ζητούμενο: $0{,}1 \leq P(A) \leq 0{,}4$

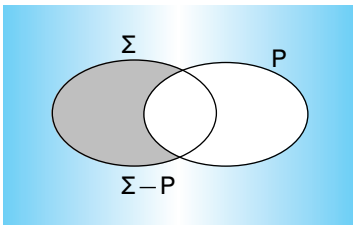
β) Είναι: $B = (R \cup \Sigma)$ οπότε
$P(B) = P[R \cup \Sigma)'] = 1 - P(R \cup \Sigma)$ *(3)*
και επειδή $P \cup \Sigma \supseteq \Sigma$ είναι $P(R \cup \Sigma) \geq P(\Sigma) \Leftrightarrow P(R \cup \Sigma) \geq 0{,}7$
η *(3)* δίνει: $P(B) \leq 1 - 0{,}7 \Leftrightarrow P(B) \leq 0{,}3$

γ) Είναι $\Gamma = \Sigma - R$

Επειδή $\Sigma - R \subseteq \Sigma$

προκύπτει αμέσως

$P(\Sigma - R) \leq P(\Sigma) \Leftrightarrow P(\Gamma) \leq 0{,}7$ *(4)*



Η ανίσωση $0{,}3 \leq P(\Gamma)$ προκύπτει πιο δύσκολα ως εξής:

Είναι: $P(\Sigma \cap R) \leq P(R)$

ή $P(\Sigma) - P(\Sigma - R) \leq P(R)$ γιατί $P(\Sigma - R) = R(\Sigma) - R(\Sigma \cap P)$

ή $P(\Sigma) - P(R) \leq P(\Sigma - R)$

ή $0{,}3 \leq P(\Gamma)$ *(5)*

Οι σχέσεις *(4)* και *(5)* δίνουν το ζητούμενο: $0{,}3 \leq P(\Gamma) \leq 0{,}7$