ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

- Να διαβάσετε τις σελίδες 8-10 του σχολικού βιβλίου. Να προσέξετε ιδιαίτερα τα σχήματα 1.1, 1.3 και 1.4 καθώς και τους ορισμούς της αρχικής φάσης και της φάσης της ταλάντωσης.
- Να γράψετε τις μαθηματικές σχέσεις που δίνονται στη θεωρία και να αναφέρετε τα μεγέθη που περιέχουν καθώς και τις μονάδες αυτών π.χ. $\boxed{T = \frac{t}{N}}$ όπου T η περίοδος της ταλάντωσης μετράται σε sec, t ο χρόνος ταλάντωσης του σώματος μετράται σε sec και N ο αριθμός επαναλήψεων του φαινομένου.
- Να απαντήσετε στις ερωτήσεις 2, 6 και 7 του σχολικού βιβλίου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ.

Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να επιλέξετε τη σωστή απάντηση :

Α1) Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι κίνηση

- ευθύγραμμη ομαλή.
- ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη.
- ομαλή κυκλική.
- ευθύγραμμη περιοδική.

Α2) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του είναι

- ανάλογη του χρόνου.
- αρμονική συνάρτηση του χρόνου.
- ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου.

- ομόρροπη με τη δύναμη επαναφοράς.

Α3) Η ταχύτητα υ σημειακού αντικειμένου το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

- είναι μέγιστη, κατά μέτρο, στη θέση x = 0.
- έχει την ίδια φάση με την απομάκρυνση x.
- είναι μέγιστη στις θέσεις x = ± A.
- έχει την ίδια φάση με τη δύναμη επαναφοράς.

Α4) Η επιτάχυνση α σημειακού αντικειμένου το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

- είναι σταθερή.
- είναι ανάλογη και αντίθετη της απομάκρυνσης x.
- έχει την ίδια φάση με την ταχύτητα.
- γίνεται μέγιστη στη θέση x = 0.

Α5) Η φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης

- αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.
- είναι σταθερή.
- ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο.
- είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου.

Α6) Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_{\upsilon} - \varphi_{x}$ μεταξύ ταχύτητας υ και απομάκρυνσης x στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι

- π
- $\frac{\pi}{2}$
- $-\pi$
- 0

Α7) Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_{x} - \varphi_{\alpha}$ μεταξύ απομάκρυνσης x και επιτάχυνσης α στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι

- 0

- π
- $-\frac{\pi}{2}$
- $-\pi$

Α8) Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_\alpha - \varphi_\upsilon$ μεταξύ επιτάχυνσης α και ταχύτητας υ στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι

- $\frac{\pi}{2}$
- $-\frac{\pi}{2}$
- $-\pi$
- 0

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ.

Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να βάλετε το γράμμα Σ δίπλα σε κάθε σωστή πρόταση και το γράμμα Λ δίπλα σε κάθε λανθασμένη :

Β1) Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη περιοδική κίνηση.

Β2) Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη κίνηση, ομαλά μεταβαλλόμενη.

Β3) Η απομάκρυνση σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του, όταν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

Β4) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του και η επιτάχυνση του α συνδέονται με την εξίσωση $\alpha = -\omega^2 \cdot x$

Β5) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της απομάκρυνσης x προηγείται της φάσης της ταχύτητας υ κατά π

Β6) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της απομάκρυνσης x καθυστερεί της φάσης της επιτάχυνσης α κατά π.

Β7) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της ταχύτητας υ προηγείται της φάσης της επιτάχυνσης α κατά $\frac{\pi}{2}$.

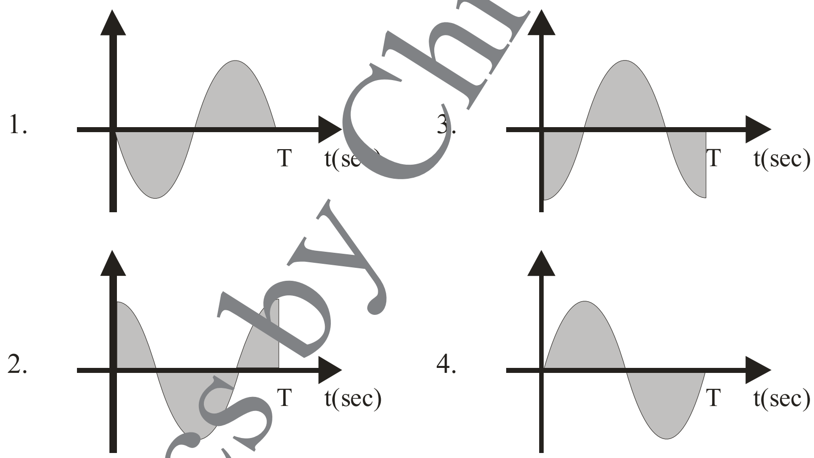
Β8) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο στη θέση $x = 0$.

Β9) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ελάχιστο στις θέσεις $x = \pm A$

Β10) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, τα διανύσματα υ και α είναι πάντα αντίρροπα.

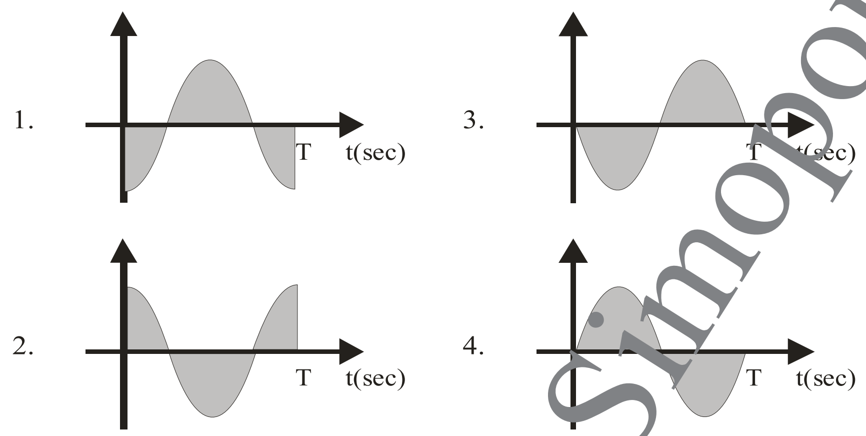
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ.

Γ1) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu\omega t$. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x, στην ταχύτητα υ και στην επιτάχυνση α.



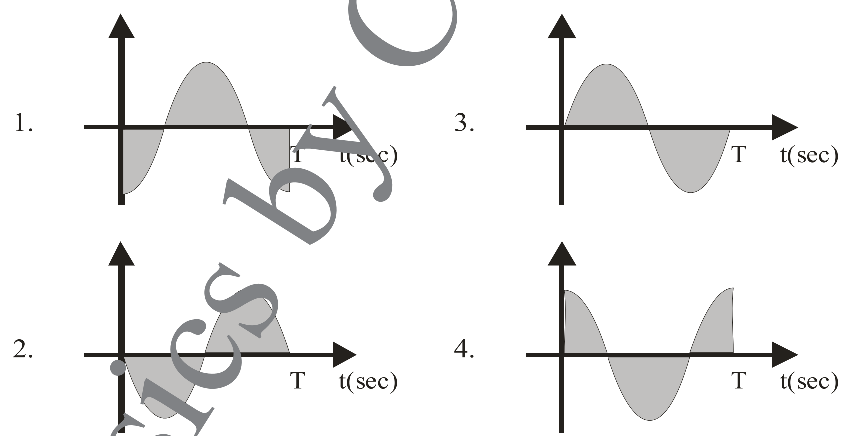
Εικόνα 1-1. Γραφικές παραστάσεις

Γ2) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x, στην ταχύτητα υ και στην επιτάχυνση α.



Εικόνα 1-2. Γραφικές παραστάσεις

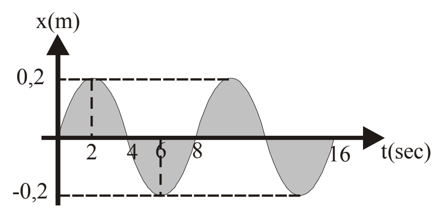
Γ3) Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η ταχύτητά του μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $\upsilon = \upsilon_0 \cdot ημωt$. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x, στην ταχύτητα υ και στην επιτάχυνση α.



Εικόνα 1-3. Γραφικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ.

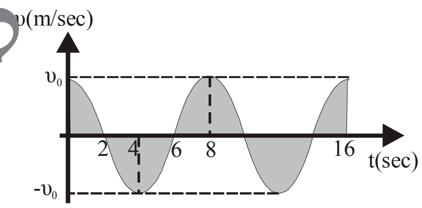
Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις :



Δ1) Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο σχήμα. Με ποιο ή ποια από τα παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

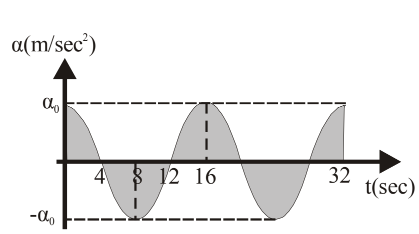
- Το μέτρο της ταχύτητας έχει τη μέγιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές 0 sec, 4 sec και 8 sec.
- Το μέτρο της επιτάχυνσης έχει τη μέγιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές 2 sec και 6 sec.
- Τη χρονική στιγμή t = 4 sec το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $\alpha = \frac{\alpha_0}{2}$.
- Τη χρονική στιγμή $t_1 = 7$ sec το μέτρο της ταχύτητας είναι μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ sec.

Δ2) Η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο σχήμα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές, ποιες είναι λανθασμένες και γιατί;



- Τις χρονικές στιγμές 0 sec, 4 sec και 8 sec το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.
- Τις χρονικές στιγμές 2 sec και 6 sec το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο.
- Στο χρονικό διάστημα από 6 sec μέχρι 8 sec τα διανύσματα της ταχύτητας υ και της συνισταμένης δύναμης F είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.
- Στο χρονικό διάστημα 0 sec μέχρι 2 sec το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.

Δ3) Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημειακό αντικείμενο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο σχήμα. Με ποιο ή ποια από τα



παρακάτω συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

- Τις χρονικές στιγμές 0 sec, 8 sec και 16 sec η ταχύτητα του αντικειμένου είναι ίση με μηδέν.
- Τη χρονική στιγμή $t = 14$ sec το αντικείμενο κινείται προς τη θέση ισορροπίας του.
- Τις χρονικές στιγμές 4 sec και 12 sec το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου έχει τη μέγιστη τιμή του.
- Η ταχύτητα του αντικειμένου κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από την εξίσωση $\upsilon = \upsilon_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ.

Στις ερωτήσεις που ακολουθούν να αναπτύξετε πλήρως τις απαντήσεις σας :

Ε1) Ποια κίνηση λέγεται περιοδική; Να αναφέρετε τρία παραδείγματα περιοδικών κινήσεων.

Ε2) Ποια κίνηση ονομάζεται ταλάντωση; Να αναφέρετε δύο παραδείγματα.

Ε3) Ποια κίνηση ονομάζεται

- γραμμική ταλάντωση;
- απλή αρμονική ταλάντωση;

Ε4) Να αναφέρετε ένα σύστημα που θα μπορούσε να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Ε5) Τι ονομάζουμε φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης; Να παραστήσετε γραφικά τη μεταβολή της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ε6) Τι σημαίνει ο όρος «αρχική φάση»; Πώς γράφονται οι εξισώσεις x = f (t), υ = =f(t), α = f (t) της απλής αρμονικής ταλάντωσης όταν υπάρχει αρχική φάση;

Ε7) Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ

- απομάκρυνσης - ταχύτητας,
- απομάκρυνσης - επιτάχυνσης,
- ταχύτητας - επιτάχυνσης, ενός υλικού σημείου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Χαρακτηριστικά μεγέθη της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι τα παρακάτω.

ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ (x ή y):

Ονομάζεται η απόσταση του σώματος κάθε χρονική στιγμή από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$ ή $y = 0$)

ΠΛΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ (Α):

Ονομάζεται η μέγιστη απόσταση του σώματος από τη θέση ισορροπίας ($x = \pm A$, ή $y = \pm A$)

ΠΕΡΙΟΔΟΣ (Τ):

Ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται για να εκτελέσει το σώμα μια πλήρη ταλάντωση δηλαδή να περάσει διαδοχικά δύο φορές από τη θέση ισορροπίας και να καταλήξει στη θέση που ξεκίνησε την ταλάντωσή του.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (f):

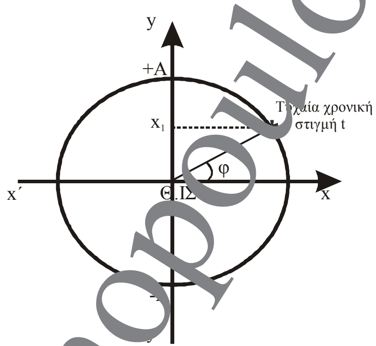
Ονομάζεται ο αριθμός των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στη μονάδα του χρόνου

Επειδή όλα τα παραπάνω αναφέρονται αναλυτικά στη θεωρία θα μελετήσουμε ιδιαίτερα τα μεγέθη που έχουν ιδιαίτερη σημασία. Όπως γνωρίζουμε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση μπορούμε να την αντιστοιχήσουμε σε μια πλήρη κυκλική κίνηση. Για το λόγο αυτό στα σχήματα θα χρησιμοποιήσουμε το τριγωνομετρικό κύκλο για την πλήρη αναπαράσταση της κίνησης μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης και την κατανόηση των εννοιών.

ΦΑΣΗ (φ):

Ονομάζουμε τη γωνία που καθορίζει την απομάκρυνση του σώματος ή του συστήματος σωμάτων από τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή t. Αυτό συμβαίνει διότι μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος σε κίνησή του σε κυκλική τροχιά.

Για παράδειγμα όταν το σώμα έχει φάση 2π rad σημαίνει ότι βρίσκεται στη θέση που ξεκίνησε την ταλάντωσή του και έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση. Παρατηρείστε το διπλανό σχήμα όπου φαίνεται ότι κάποια τυχαία χρονική στιγμή t το σώμα έχει φάση φ. Αυτή αντιστοιχεί στην απομάκρυνση x_1 του σώματος από τη θέση ισορροπίας.



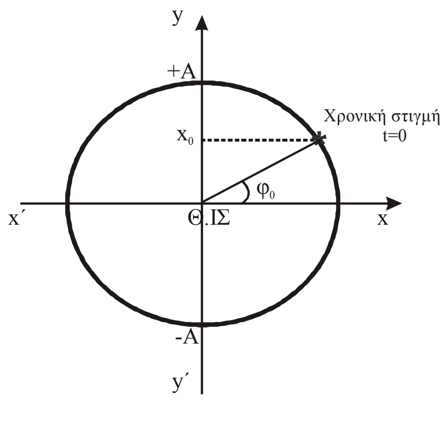
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Κάθε φάση αντιστοιχεί σε μία απομάκρυνση.

Θα λέμε ότι δυο ταλαντώσεις βρίσκονται σε φάση όταν διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου Τ δηλαδή Δφ = 2kπ όπου k = 0,1,2,3...

ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ:

Ονομάζουμε την αρχική γωνία από τη θέση ισορροπίας, από την οποία ξεκινά το σώμα ή το σύστημα σωμάτων την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή t = 0 δηλαδή μόλις αρχίζει τη κίνησή του και η οποία αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη απομάκρυνση.



Το σώμα (ή το σύστημα) που ταλαντώνεται έχει αρχική φάση όταν:

- Τη χρονική στιγμή t = 0 έχει απομάκρυνση x_0 διάφορη του μηδενός ($x_0 \neq 0$). Δηλαδή ξεκινά την ταλάντωσή του από οποιαδήποτε θέση εκτός της x = 0 ή από τη θέση x = 0 έχοντας αρνητική ταχύτητα.
- Τη χρονική στιγμή $t \neq 0$ με $t \neq k.T$ όπου k = 1,2,3.... και Τ η περίοδος ταλάντωσης, το σώμα βρίσκεται στη θέση x = 0. Αυτό σημαίνει ότι ξεκίνησε τη ταλάντωσή του από μια θέση διάφορη της θέσης ισορροπίας του.

- Η εξίσωση της απομάκρυνσης που δίνεται από το πρόβλημα είναι διαφορετικής μορφής από τη γνωστή εξίσωση $x = A \cdot ημωt$ (π.χ $x = A \cdot συνωt$ οπότε θα έχω $x = A \cdot ημ(ωt + \frac{π}{2})$ άρα η αρχική φάση στο παράδειγμα είναι $\frac{π}{2}$).
- Τη χρονική στιγμή t = 0 η ταχύτητα του σώματος (ή του συστήματος) έχει τιμή μικρότερη από τη μέγιστη τιμή της.
- Τη χρονική στιγμή t = 0 η επιτάχυνση του σώματος (ή του συστήματος) έχει τιμή διάφορη του μηδενός.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ (Δφ):

Μεταξύ δύο μεγεθών ονομάζεται η γωνία που αντιστοιχεί στο χρόνο που απαιτείται για να πάρει το ένα μέγεθος την αντίστοιχη τιμή ενός άλλου μεγέθους.

Για παράδειγμα αν τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα είναι μηδέν για να πάρει η απομάκρυνση την ίδια τιμή (δηλαδή μηδέν) περνά κάποιος χρόνος Δt. Αυτός ο χρόνος αντιστοιχεί σε κάποια γωνία η οποία ονομάζεται διαφορά φάσης. Η αντιστοιχία αυτή δίνεται από την απλή μέθοδο των τριών για τα μεγέθη χρόνος-φάση αφού γνωρίζουμε ότι σε χρόνο μιας περιόδου Τ αντιστοιχεί γωνία 2φ rad.

$$\boxed{\frac{T}{Δt} = \frac{2π}{Δφ} \Rightarrow Δφ = 2π\frac{Δt}{T}} \qquad (1)$$

ή αλλιώς $Δφ = φ_1 - φ_2 = ωt_1 - ωt_2 = ω(t_1 - t_2) \Rightarrow Δφ = 2π\frac{Δt}{T}$

Για να υπολογίσουμε τη φάση πρέπει να γνωρίζουμε τις τριγωνομετρικές σχέσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις ημιτόνων, συνημιτόνων και εφαπτομένης. Συγκεκριμένα:

- α) Εάν ημφ = α όπου α ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο ημφ (π.χ. ½)

Βρίσκω το τόξο θ που έχει ημίτονο τον αριθμό α οπότε έχω

$$\boxed{ημφ = ημθ \Rightarrow \begin{matrix} φ = 2kπ + θ \\ φ = 2kπ + π - θ \end{matrix}}$$

Θέτοντας k = 0 υπολογίζω τις τιμές της γωνίας φ που αντιστοιχούν στην κίνηση του σώματος κατά την πρώτη πλήρη ταλάντωση.

Για παράδειγμα $ημφ = \frac{1}{2} \Rightarrow ημφ = ημ30^0 \Rightarrow ημφ = ημ\frac{π}{6} \Rightarrow \begin{array}{l} φ = 2kπ + \frac{π}{6} \\ φ = 2kπ + π - \frac{π}{6} \end{array}$

- β) Εάν συνφ=α, όπου α ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο συνφ (π.χ. ½) Κατά τον ίδιο τρόπο θα έχω

$$\boxed{συνφ = συνϑ \Rightarrow \begin{array}{l} φ = 2kπ - ϑ \\ φ = 2kπ + ϑ \end{array}}$$

Για παράδειγμα $συνφ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow συνφ = συν30^0 \Rightarrow συνφ = συν\frac{π}{6} \Rightarrow \begin{array}{l} φ = kπ + \frac{π}{6} \\ φ = kπ - \frac{π}{6} \end{array}$

- γ) Εάν εφφ=α, όπου α ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο εφφ (π.χ. ½) Όμοια όπως προηγούμενα

$$\boxed{εφφ = εφϑ \Rightarrow \begin{array}{l} φ = kπ + ϑ \\ φ = kπ - ϑ \end{array}}$$

Για παράδειγμα $εφφ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow εφφ = εφ30^0 \Rightarrow εφφ = εφ\frac{π}{6} \Rightarrow \begin{array}{l} φ = kπ + \frac{π}{6} \\ φ = kπ - \frac{π}{6} \end{array}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

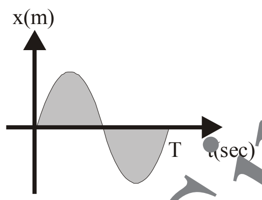
Θα πρέπει να αναφέρουμε τη σημασία της σταθεράς k στα προβλήματα των ταλαντώσεων. Η σταθερά k δηλώνει σε ποια ταλάντωση βρίσκεται το σώμα κατά την κίνησή του και όχι πόσες πλήρεις ταλαντώσεις έχει διαγράψει το σώμα. Αυτό σημαίνει ότι η σταθερά k αλλάζει κάθε φορά που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας (η οποία αντιστοιχεί στη θέση των 0^0 στον τριγωνομετρικό κύκλο) κινούμενο πάντα προς το θετικό ημιάξονα (η οποία αντιστοιχεί στη θέση των 90^0 στο τριγωνομετρικό κύκλο).

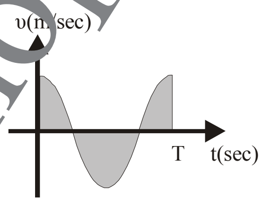
Για την κατανόηση των παραπάνω διαβάστε το παράδειγμα 1.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ:

Με βάση τις σχέσεις της ταλάντωσης και τις γραφικές παραστάσεις αυτών θα έχουμε τις παρακάτω διαφορές φάσεις μεταξύ των μεγεθών της απομάκρυνσης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και της δύναμης, όπως φαίνεται

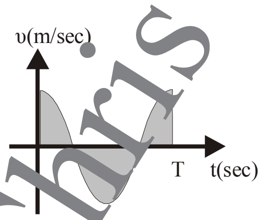
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και της ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο

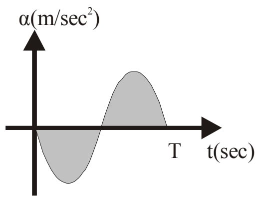




παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση x υστερεί της ταχύτητας υ κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad.

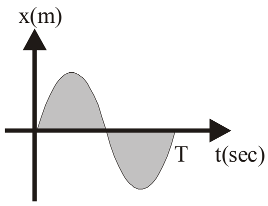
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η ταχύτητα

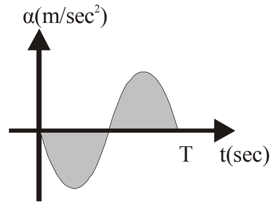




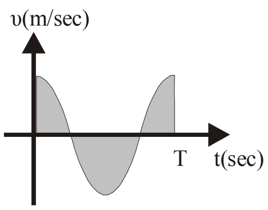
υ υστερεί της επιτάχυνσης α κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad.

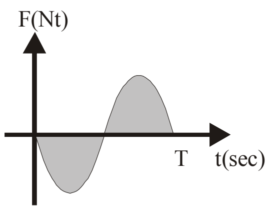
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση x υστερεί της επιτάχυνσης α κατά γωνία π rad.





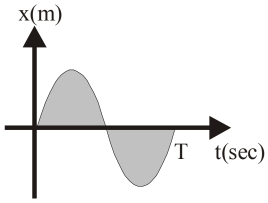
Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο και της

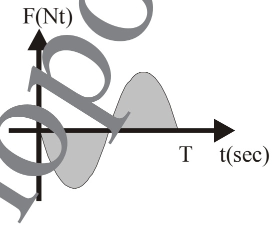




δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η ταχύτητα υ υστερεί της δύναμης επαναφοράς $F_{επ}$ κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad.

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση x υστερεί της δύναμης επαναφοράς $F_{επ}$ κατά γωνία π rad.





ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΓΕΘΩΝ:

Στις ασκήσεις των ταλαντώσεων αρκετές φορές θα χρειαστεί να γνωρίζουμε σχέσεις μεταξύ διαφόρων μεγεθών. Ο τρόπος εργασίας στις περιπτώσεις αυτές είναι ίδιος και οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται τις περισσότερες φορές με τη χρήση τριγωνομετρικών σχέσεων. Έτσι :

- Απόδειξη της σχέσης που συνδέει την απομάκρυνση με την ταχύτητα:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow \eta\mu^2(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{x^2}{A^2} \quad (1)$$

$$\upsilon = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{\upsilon^2}{\omega^2 \cdot A^2} \quad (2)$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι ισχύει $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$ οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) σε αυτή έχουμε

$$\eta\mu^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega \cdot t + \varphi) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 \cdot A^2} = 1 \Rightarrow \upsilon^2 + \omega^2 \cdot x^2 = \omega^2 \cdot A^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2 \cdot A^2 - \omega^2 \cdot x^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\boxed{\upsilon = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}}$$

- Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει και η σχέση μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης

$$\boxed{\alpha = \pm\omega \cdot \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}}$$

Προσέξτε ιδιαίτερα τη σχέση που συνδέει την απομάκρυνση με την επιτάχυνση διότι είναι πολύ απλή και χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις ασκήσεων.

$$\boxed{\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow \alpha = -\omega^2 \cdot x}$$

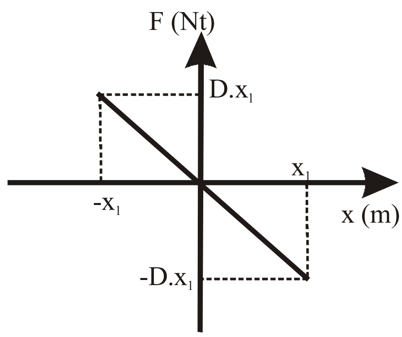
- Η εξίσωση της δύναμης είναι ίσως η βασικότερη εξίσωση των ταλαντώσεων.

Από την εξίσωση αυτή καθορίζεται αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ποια είναι η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στο σώμα που ταλαντώνεται κάθε χρονική στιγμή κλπ. Η συνισταμένη δύναμη εκφράζεται σε συνάρτηση με την απομάκρυνση ή σε συνάρτηση με το χρόνο από τις σχέσεις

$$\boxed{\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} = -D \cdot x} \text{ ή } \boxed{\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} = -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \phi)}$$

Εκτός των τριών γραφικών παραστάσεων απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης που αναφέρει το σχολικό βιβλίο μπορούμε να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο καθώς επίσης και τη γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.

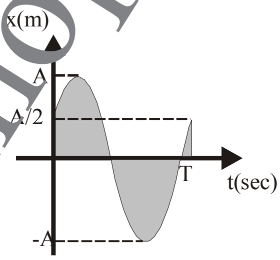
Η γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι ίδια με τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο διότι η δύναμη είναι ανάλογη της επιτάχυνσης $F = m \cdot \alpha$ έτσι δε χρειάζεται να τη σχεδιάσουμε.



Η γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι εξίσωση πρώτου βαθμού αφού $F = -D \cdot x$ και σχεδιάζεται όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ:

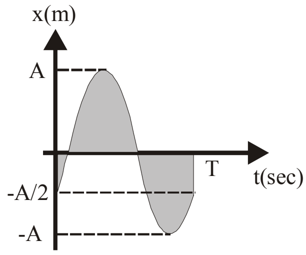
Επειδή στη φυσική δεν μας ενδιαφέρει ο λεπτομερής σχεδιασμός μιας γραφικής παράστασης θα αναφέρουμε έναν εύκολο τρόπο για το σχεδιασμό μιας γραφικής παράστασης με αρχική φάση όπως αυτές που αναφέρει το σχολικό βιβλίο.



Εάν για παράδειγμα μας ζητηθεί η γραφική παράσταση της εξίσωσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο $x = A \cdot ημ(ω \cdot t + \frac{π}{6})$ τότε σχεδιάζω την κλασσική γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με το χρόνο χωρίς αρχική φάση και μετατοπίζω τον άξονα της απομάκρυνσης προς τα δεξιά. Η μετατόπιση γίνεται με τον εξής τρόπο:

Χωρίζω το τεταρτημόριο $(0 - \frac{T}{4})$ σε τρία ίσα μέρη από τα οποία το καθένα αντιστοιχεί σε γωνία $(\frac{π}{6})$ rad και μεταφέρω τον άξονα κατά το αντίστοιχο τμήμα. Τέλος για να υπολογίσω τη τιμή που αρχίζει η γραφική παράσταση θέτω στην εξίσωση της απομάκρυνσης t = 0 και έχω

$$x = A \cdot ημ(ω \cdot 0 + \frac{π}{6}) \Rightarrow x = A \cdot ημ(\frac{π}{6}) \Rightarrow x = A \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

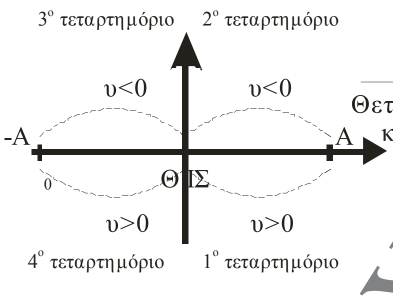


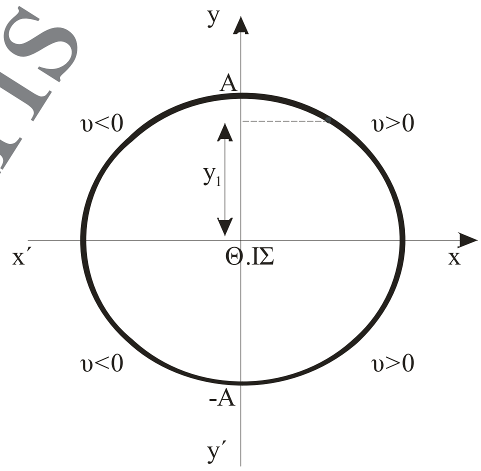
Όμοια εργάζομαι για οποιαδήποτε άλλη γωνία. Εάν δε η εξίσωση έχει αρνητική αρχική φάση η μετατόπιση του άξονα γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προς τα αριστερά. Δηλαδή

Χωρίζω το τεταρτημόριο $(0 - \frac{T}{4})$ σε τρία ίσα μέρη από τα οποία το καθένα αντιστοιχεί σε γωνία $(\frac{π}{6})$ rad και μεταφέρω τον άξονα κατά το αντίστοιχο τμήμα προς τ' αριστερά. Η γραφική παράσταση της εξίσωσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο $x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6})$ θα είναι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΡΟΣΟΧΗ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΣΤΑ ΠΙΟ ΚΑΤΩ ΘΕΜΑΤΑ

- Απαραίτητη προϋπόθεση για τη λύση των ασκήσεων είναι ο σχεδιασμός του διαγράμματος που ακολουθεί για να καταλαβαίνουμε την αρχική θέση εκκίνησης του ταλαντευόμενου σώματος αλλά και τη θέση του κάθε χρονική στιγμή. Το διάγραμμα μπορεί να σχεδιαστεί ή με τη μορφή τριγωνομετρικού κύκλου, οπότε η λύση τότε είναι περισσότερο μαθηματική και λιγότερο φυσική ή απλό σχεδιάγραμμα του σχολικού βιβλίου στο οποίο φαίνεται κάθε χρονική στιγμή η θέση του κινητού και η φορά κίνησής του και το οποίο αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.



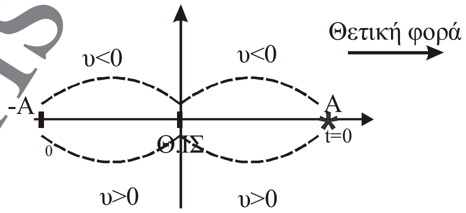


Προσέξτε την πλήρη αντιστοιχία μεταξύ του διαγράμματος του σχολικού και του τριγωνομετρικού κύκλου.

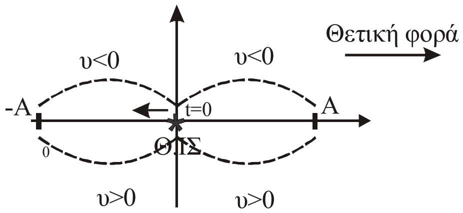
- Όταν η εξίσωση της απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης εκφράζεται με συνημίτονο (συν) και η εξίσωση της ταχύτητας με ημίτονο (ημ), τις μετατρέπω σε εξισώσεις ημίτονου (ημ) ή συνημίτονου (συν) αντίστοιχα για να καθορίσω την αρχική φάση της ταλάντωσης. Οι σχέσεις που χρησιμοποιώ είναι οι εξής:

$$\sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \varphi_0) = \begin{matrix} \eta\mu(\frac{\pi}{2} + \omega \cdot t + \varphi_0) \\ \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \omega \cdot t - \varphi_0) \end{matrix}$$

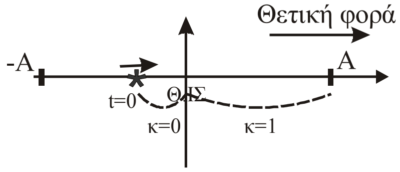
- Όταν δίνεται η απόσταση x των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης ενός σώματος τότε το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $x = 2A \Rightarrow A = \frac{x}{2}$
- Όταν ένα σώμα που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση περνά από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα υ αυτή δηλώνει ταυτόχρονα και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.
- Η φορά λαμβάνεται υπόψη πάντα στο σχήμα και καθορίζεται σα θετική η φορά εκείνη προς το άκρο της οποίας κατευθύνεται το σώμα για πρώτη φορά εκτός αν αναφέρεται από την εκφώνηση κάτι άλλο.
- Εάν το σώμα ξεκινά από ακραία θέση ταλάντωσης αυτή καθορίζεται πάντα από τη θέση +A, και η αρχική του φάση είναι ίση με $\frac{\pi}{2}$ δηλαδή $x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$.



- Εάν το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση τότε έχει αρχική φάση π δηλαδή $x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \pi)$.

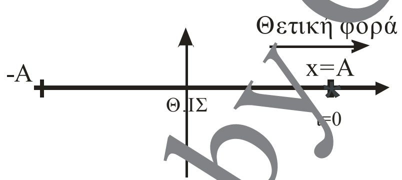


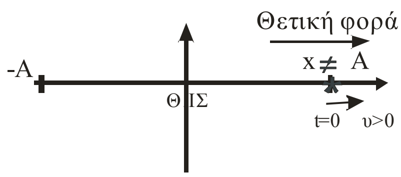
- Κάθε μετατόπιση μεταξύ του –A και της θέσης ισορροπίας (Θ.Ι.Σ) ορίζεται σαν αρνητική (όπως και κάθε ταχύτητα αντίθετη της θετικής φοράς κίνησης) δηλαδή στην εξίσωση της απομάκρυνσης τοποθετούμε την απομάκρυνση x με αρνητικό πρόσημο $-x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi)$
- Κάθε φορά που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς το θετικό άκρο +A αλλάζει η τιμή της σταθεράς k στις τριγωνομετρικές σχέσεις ημίτονου, συνημίτονου



και εφαπτομένης. Το σώμα τότε αρχίζει να κινείται σε μια νέα τροχιά (νέος κύκλος) ανεξάρτητα από τη θέση που ξεκίνησε την ταλάντωσή του. Έτσι για παράδειγμα εάν το σώμα αρχίζει την ταλάντωσή του από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ τότε στη σχέση της απομάκρυνσης θα έχω k = 0, από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ μέχρι τη θέση x = 0 και k = 1 από τη θέση x = 0 και μετά.

- Για να υπολογίσω το χρόνο που απαιτείται για τη μετακίνηση ενός σώματος από τη θέση x_1 στη θέση x_2 τοποθετώ τις τιμές αυτές στην εξίσωση της απομάκρυνσης. Στη συνέχεια προσέχω να απορρίψω τις σωστές τιμές των χρόνων με βάση τη φορά κίνησης του σώματος και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται αυτό τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Για τη κατανόηση των παραπάνω διαβάστε το παράδειγμα 2.
- Όταν ένα σώμα το απομακρύνω από τη θέση ισορροπίας κατά x και στη συνέχεια το αφήσω ελεύθερο να ταλαντωθεί για να εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση τότε η απομάκρυνση x δηλώνει ταυτόχρονα και το πλάτος ταλάντωσης A ενώ αν στη θέση x του δώσω ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ η απομάκρυνση x δηλώνει τυχαία θέση ταλάντωσης και όχι το πλάτος ταλάντωσης A.





ΤΡΟΠΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

> **α. Σχεδιάζουμε το σχεδιάγραμμα ταλάντωσης του σώματος και τοποθετούμε πάντα τη χρονική στιγμή t = 0 για να γνωρίζουμε το τεταρτημόριο από το οποίο αρχίζει την ταλάντωσή του το σώμα.**
>
> **β. Γράφουμε τις χρονικές εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν.**
>
> **γ. Ελέγχουμε τις ειδικές συνθήκες αν υπάρχουν.**
>
> **δ. Αντικαθιστούμε τις τιμές του προβλήματος στις εξισώσεις.**

ε. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει ελέγχοντας τις δεκτές τιμές των γωνιών από το σχεδιάγραμμα της ταλάντωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

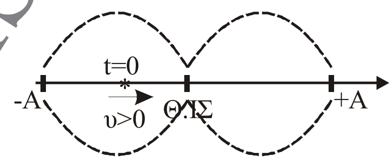
- **Μετά τη λύση των παραδειγμάτων 1, 2, 3 και 4 να λύσετε τα παραδείγματα 5 και 6 που ακολουθούν.**

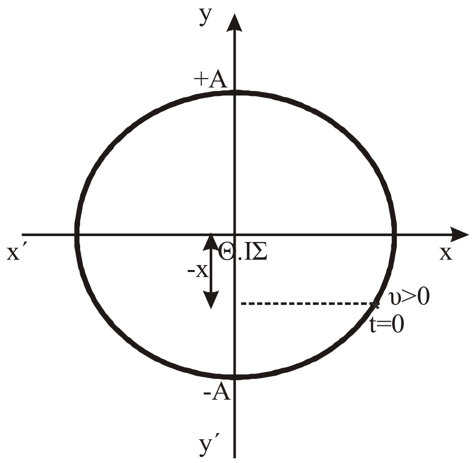
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0,4 \cdot ημ(10 \cdot t + φ_0)$. Τη χρονική στιγμή t = 0 περνά από τη θέση $x = -0,2 \cdot \sqrt{2}$ m με θετική ταχύτητα. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

ΛΥΣΗ

Πριν αρχίσουμε τη λύση της άσκησης πρέπει απαραίτητα να σχεδιάσουμε την κίνηση του σώματος είτε σε ευθεία γραμμή όπως δείχνει το διπλανό σχήμα (αντίστοιχο σχήμα χρησιμοποιείται στο σχολικό βιβλίο) είτε στον τριγωνομετρικό κύκλο. Η αντιστοιχία των δύο διαγραμμάτων είναι πλήρης και μπορούμε να χρησιμοποιούμε όποιο θέλουμε από τα δύο.





Στη συνέχεια μελετούμε το φαινόμενο το οποίο έχουμε και εφαρμόζουμε την αντίστοιχη αρχή για τη λύση του. Στα πρώτα παραδείγματα το φαινόμενο είναι η απλή αρμονική ταλάντωση και θα εφαρμόζουμε πάντα χρονικές εξισώσεις.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από τη σχέση $x = 0,4 \cdot ημ(10 \cdot t + φ_0)$ (1)

- Φαινόμενο : Απλά αρμονική ταλάντωση
- Εφαρμόζουμε : Εξισώσεις ταλάντωσης

Θέτουμε στην (1) $x=-0{,}2\cdot\sqrt{2}\ \text{m}$, $t=0$ και έχουμε

$$-0{,}2\cdot\sqrt{2}=0{,}4\cdot ημ(10.0+\varphi_0)\Rightarrow ημ\varphi_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow ημ\varphi_0=ημ(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi_0=\begin{cases}2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\\[2mm] 2k\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\xrightarrow{k=0}\varphi_0=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\\[2mm] \dfrac{5\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\varphi_0=\begin{cases}2\pi-\dfrac{\pi}{4}\\[2mm] \dfrac{5\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\varphi_0=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{4}\ \text{rad}\\[2mm] \dfrac{5\pi}{4}\ \text{rad}\,(απορ)\end{cases}$$

Επειδή η ταχύτητα είναι θετική δεκτή είναι η τιμή $\varphi_0=\frac{7\pi}{4}$ rad διότι το υλικό σημείο ξεκινά τη ταλάντωσή του από το τέταρτο τεταρτημόριο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Στο τέταρτο τεταρτημόριο τη γωνία δεν τη γράφουμε ποτέ με αρνητικό πρόσημο. Πάντα τη γράφουμε σα γωνία ολόκληρου κύκλου για παράδειγμα η γωνία $-\frac{\pi}{4}$ rad **θα γραφεί σα γωνία** $2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$ rad**.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση με πλάτος A = 0,2 m και συχνότητα $f=\frac{1}{\pi}$ Hz. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση $x_1=+0{,}1$ m έως τη θέση $x_2=-0{,}1$ m .

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε πρώτα την κυκλική συχνότητα ω από τη γνωστή σχέση που συνδέει την κυκλική συχνότητα ω με τη συχνότητα f, $\omega=2\pi\cdot f\Rightarrow\omega=2\pi\cdot\frac{1}{\pi}\Rightarrow\omega=2\ \text{rad/sec}$

Γράφουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2 \cdot t)\,(1)$

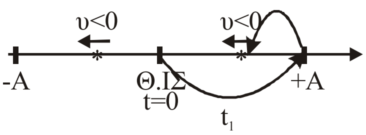
- <u>Φαινόμενο : Απλά αρμονική ταλάντωση</u>
- <u>Εφαρμόζουμε : Εξισώσεις ταλάντωσης</u>

Θέτουμε στην (1) x = 0,1 m και έχουμε

$$0{,}1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2 \cdot t) \Rightarrow \eta\mu(2 \cdot t) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2 \cdot t = \begin{array}{l} 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{array} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{k=0} 2 \cdot t = \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6}\ \alpha\pi o\rho \\ \dfrac{5\pi}{6}\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{array}$$

Για να υπολογίσουμε τον5 ελάχιστο χρόνο πρέπει το υλικό σημείο να ξεκινά την ταλάντωσή του από το δεύτερο τεταρτημόριο οπότε δεκτή τιμή είναι η τιμή



$\dfrac{5\pi}{6}$ rad. Ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση που ξεκίνησε μέχρι τη θέση $x_1 = +0{,}1$ m θα είναι

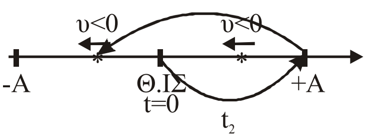
$$2 \cdot t_1 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{5\pi}{12}\ \text{sec}$$

Θέτουμε στην (1) x = −0,1 m και έχουμε

$$-0{,}1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2 \cdot t) \Rightarrow \eta\mu(2 \cdot t) = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 2 \cdot t = \begin{array}{l} 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi + \dfrac{\pi}{6} \end{array} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{k=0} 2 \cdot t = \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{6}\ \alpha\pi o\rho \\ \dfrac{7\pi}{6}\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{array}$$

Για να υπολογίσουμε τον ελάχιστο χρόνο πρέπει το υλικό σημείο να φτάσει στο τρίτο τεταρτημόριο



οπότε δεκτή τιμή είναι η τιμή $\frac{7\pi}{6}$ rad .Ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση που ξεκίνησε μέχρι τη θέση $x_2 = -0{,}1$ m θα είναι

$$2t_2 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{7\pi}{12} \text{ sec}$$

Επομένως ο ελάχιστος χρόνος για τη μετακίνηση του σώματος μεταξύ των δύο θέσεων είναι $\Delta t = \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{6}\text{sec}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 η απομάκρυνση είναι ίση με το μισό του πλάτους $x = \frac{1}{2} \cdot A$ και η ταχύτητά του αρνητική. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο και

β) την ταχύτητα, και την επιτάχυνση κατά τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{2}$ sec εάν δίνεται το πλάτος της ταλάντωσης A = 0,01 m και η συχνότητα f = 10 Hz.

ΛΥΣΗ

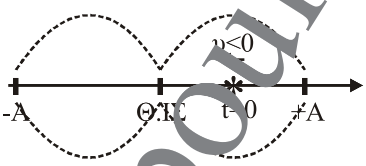
Έχουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = 10 \cdot ημ(20\pi \cdot t + \varphi_0)$ (1)

- Φαινόμενο : Απλά αρμονική ταλάντωση
- Εφαρμόζουμε : Εξισώσεις ταλάντωσης

Θέτουμε στην (1) για $x = \frac{1}{2} \cdot A = 5$ cm και έχουμε

$$5 = 10 \cdot ημ\varphi_0 \Rightarrow ημ\varphi_0 = ημ(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \varphi_0 = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{k=0} \varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} & \text{απορ} \\ \frac{5\pi}{6} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Επειδή η ταχύτητα είναι αρνητική δεκτή είναι η τιμή $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ rad διότι το υλικό σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από το δεύτερο τεταρτημόριο. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται



$$x = 10 \cdot \eta\mu(20\pi \cdot t + \frac{5\pi}{6}) \ (2)$$

- <u>β) Φαινόμενο : Απλή αρμονική ταλάντωση</u>
- <u>Εφαρμόζουμε : Εξισώσεις ταλάντωσης</u>

Από τη σχέση της ταχύτητας έχουμε για $t_1 = \frac{1}{2}$ sec και $\omega = 2\pi \cdot f = 20\pi$ rad/sec

$$\upsilon = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \upsilon = 20\pi \cdot 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(20\pi \cdot t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = 200\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(20\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \upsilon = 200\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \upsilon = -100\pi \cdot \sqrt{3} \ cm/sec$$

και για την επιτάχυνση

$$\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \alpha = -400\pi^2 \cdot 10 \cdot \eta\mu(20\pi \cdot t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -4000\pi^2 \cdot \eta\mu(20\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \alpha = -2000\pi^2 \ cm/sec^2$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο</u>

Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση είναι $x = 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot t - \frac{\pi}{3})$ (S.I.). Μετά πόσο χρόνο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο περνά

α) για πρώτη φορά και για τρίτη φορά από τη θέση ισορροπίας.

β) ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που αυτό περνά από τη θέση $x = -0{,}05$ m για πρώτη φορά, έχοντας θετική ταχύτητα.

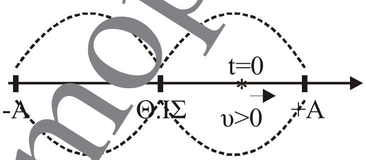
<u>ΛΥΣΗ</u>

Μετατρέπουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης στη γνωστή της μορφή.

$$x = 0{,}1 \cdot συν(2π \cdot t - \frac{π}{3}) \Rightarrow x = 0{,}1 \cdot ημ(\frac{π}{2} + 2π \cdot t - \frac{π}{3}) \Rightarrow x = 0{,}1 \cdot ημ(2π \cdot t + \frac{π}{6}) \quad (1)$$

Επομένως από την εξίσωση της απομάκρυνσης θα έχουμε:

$A = 0{,}1$ m, $ω = 2π$ rad/s, και $φ_0 = \frac{π}{6}$ rad.



- Φαινόμενο : Απλά αρμονική ταλάντωση
- Εφαρμόζουμε : Εξισώσεις ταλάντωσης

Θέτουμε στην (1) x = 0 και έχουμε

$$0 = 0{,}1 \cdot ημ(2π \cdot t + \frac{π}{6}) \Rightarrow ημ(2π \cdot t + \frac{π}{6}) = ημ0 \Rightarrow 2π \cdot t + \frac{π}{6} = \begin{matrix} 2kπ + 0 \\ 2kπ + π - 0 \end{matrix} \quad (2)$$

Επειδή το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από το 1ο τεταρτημόριο θέτουμε στην εξίσωση (2) k = 0

$$\xrightarrow{k=0} 2π \cdot t + \frac{π}{6} = \begin{matrix} +0 \\ +π \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} -\frac{π}{6} \\ π - \frac{π}{6} \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} -\frac{π}{6} \text{ απορ} \\ \frac{5π}{6} \text{ δεκτή} \end{matrix}$$

Όταν το σώμα περνά για τρίτη φορά από τη θέση ισορροπίας θα βρίσκεται στο 6ο τεταρτημόριο αφού τη δεύτερη φορά που πέρασε από τη θέση ισορροπίας ολοκλήρωσε έναν κύκλο ταλάντωσης. Έτσι θέτουμε στην εξίσωση (2) k = 1 και έχουμε

$$\xrightarrow{k=1} 2π \cdot t + \frac{π}{6} = \begin{matrix} 2π \\ 3π \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} 2π - \frac{π}{6} \\ 3π - \frac{π}{6} \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} \frac{11π}{6} \text{ δεκτή} \\ \frac{17π}{6} \text{ απορ} \end{matrix}$$

β) Θέτουμε στην (1) x = -0,05 m και έχουμε

$$-0{,}05 = 0{,}1 \cdot ημ(2π \cdot t + \frac{π}{6}) \Rightarrow ημ(2π \cdot t + \frac{π}{6}) = -\frac{1}{2} = ημ(-\frac{π}{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2π \cdot t + \frac{π}{6} = \begin{matrix} 2kπ - \frac{π}{6} \\ 2kπ + π + \frac{π}{6} \end{matrix} \quad (3)$$

Θέτουμε στη σχέση (3) k = 0 και έχουμε

$$\xrightarrow{k=0} 2π \cdot t + \frac{π}{6} = \begin{matrix} -\frac{π}{6} \\ +π + \frac{π}{6} \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} -\frac{2π}{6} - \frac{π}{6} \\ +π + \frac{π}{6} - \frac{π}{6} \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} -\frac{π}{2} \\ π \end{matrix} \quad (4)$$

Επειδή η γωνία στο τέταρτο τεταρτημόριο προκύπτει αρνητική τη γράφουμε σα γωνία ολόκληρου κύκλου δηλαδή

$$\Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} 2π - \frac{π}{2} \\ π \end{matrix} \Rightarrow 2π \cdot t = \begin{matrix} \frac{3π}{2} \ \text{δεκτή} \\ π \ \text{απορ} \end{matrix} \Rightarrow t = \frac{3}{4} \ \text{sec}$$

Θέτουμε τη τιμή του χρόνου στις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και έχουμε

$$υ = ω \cdot A \cdot συν(ω \cdot t + \frac{π}{6}) \Rightarrow υ = 2π \cdot 0{,}1 \cdot συν(2π \cdot \frac{3}{4} + \frac{π}{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ = 0{,}2π \cdot συν(\frac{2π}{3} + \frac{π}{6}) \Rightarrow υ = 0{,}2π \cdot συν(\frac{5π}{6}) \Rightarrow υ = -0{,}1π \cdot \sqrt{3} \ \text{m/sec}$$

$$α = -ω^2 \cdot A \cdot ημ(ω \cdot t + \frac{π}{6}) \Rightarrow α = -4π^2 \cdot 0{,}1 \cdot ημ(2π \cdot \frac{3}{4} + \frac{π}{6}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow α = -0{,}4π^2 \cdot ημ(\frac{2π}{3} + \frac{π}{6}) \Rightarrow α = -0{,}4π^2 \cdot ημ(\frac{5π}{6}) \Rightarrow α = -0{,}2π^2 \ \text{m/sec}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ο

Υλικό σημείο εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση με πλάτος A = 0,1 m και συχνότητα f = 20 Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 έχει απομάκρυνση x = 0,05 m και ταχύτητα αρνητική. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε:

α) την απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{4}$ sec.

β) το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το σώμα στη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης για πρώτη φορά.

γ) Να εξετάσετε τα ίδια όταν το υλικό σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση x = -0,05m με αρνητική ταχύτητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6^{ο}

Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση με πλάτος Α = 0,1 m και συχνότητα f = 0,5 Hz. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση $x_1 = 0{,}05$ m έως τη θέση $x_2 = 0{,}05\sqrt{3}$ m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- **Να λύσετε τις ασκήσεις 37 και 39 του σχολικού βιβλίου.**
- **Να λύσετε τις ασκήσεις που ακολουθούν.**

1. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους Α = 0,2 m και κυκλικής συχνότητας ω = 20 rad/sec. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να γράψετε την εξίσωση, της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο, αν δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση

α) x = 0 και έχει θετική ταχύτητα (υ > 0)

β) x = 0 και έχει αρνητική ταχύτητα (υ < 0)

2. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με εξίσωση απομάκρυνσης που δίνεται από τη σχέση $x = 0{,}2 \cdot ημ(πt + \frac{π}{3})$ (S.I.). Να υπολογίσετε

α) την αρχική φάση, τη γωνιακή ταχύτητα και την περίοδο της ταλάντωσης

β) το πλάτος και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου

γ) την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t = 2 sec. Δίνεται $π^2 = 10$.

3. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A = 0,1 m και συχνότητα f = 0,25 Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 έχει απομάκρυνση x = 0,1 m. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την αρχική φάση, τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης του σώματος

β) τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα έχει για δεύτερη φορά απομάκρυνση $x = -0{,}05$ m και θετική φορά κίνησης. Δίνεται $π^2 = 10$.

4. Σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση με πλάτος A = 0,2 m και συχνότητα f = 50 Hz. Το σώμα τη χρονική στιγμή t = 0 έχει απομάκρυνση $x = -0{,}1$ m και κινείται κατά τη θετική φορά. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την αρχική φάση της ταλάντωσης

β) την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση ταλάντωσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{4}{3}$ sec και

γ) το χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί το σώμα στη θέση x = 0,1 m για πρώτη φορά. Δίνεται $ημ\frac{811π}{6} = -0{,}5$ και $π^2 = 10$.

5. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από τη σχέση $x = 0{,}1 \cdot συν(2πt - \frac{π}{6})$ (S.I.).

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο από τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα περνά από τη θέση $x = -0{,}05$ m έχοντας θετική ταχύτητα και

γ) ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος στη θέση αυτή. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

6. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A = 0,1 m και συχνότητα f = 10 Hz. Το υλικό σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί από τη θέση $x_1 = -0{,}05$ m μέχρι τη θέση $x_2 = 0{,}05\sqrt{3}$ m και

β) την ταχύτητα και την επιτάχυνση ταλάντωσης του σώματος όταν περνά από τις αντίστοιχες θέσεις. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

7. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A = 0,02 m και αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{0{,}2}{3}$ sec το σώμα περνά για πρώτη φορά από τη θέση $x = 0{,}01$ m * κινούμενο κατά τη θετική φορά. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την περίοδο της ταλάντωσης

β) τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης και

γ) την τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

8. Σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο θέσεων που απέχουν απόσταση d = 0,2 m. Τη χρονική στιγμή t = 0 βρίσκεται στη μέγιστη δυνατή θετική απομάκρυνση και μετά από χρόνο t = 0,25 sec περνά από τη θέση ισορροπίας. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος

β) να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

9. Σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση της οποίας η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $x = 0{,}08 \cdot ημ\dfrac{\pi}{3}t$ (S.I.). Να υπολογίσετε

α) τις χρονικές στιγμές για τις οποίες η απομάκρυνση είναι ίση με το μισό του πλάτους ($x = \pm 0{,}04$ m) σε μια περίοδο

β) τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα θα περάσει από τη θέση x = 0,04m για δεύτερη φορά με θετική ταχύτητα

γ) την ταχύτητα και την επιτάχυνση τη στιγμή που η απομάκρυνση του σώματος είναι ίση με $x = -0{,}04$ m για πρώτη φορά. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

10. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν το υλικό σημείο περνά από τις θέσεις $x_1 = 0{,}16$ m και $x_2 = 0{,}12$ m, η ταχύτητα του έχει αντίστοιχα τιμές $υ_1 = 1{,}2$ m/sec και $υ_2 = 1{,}6$ m/sec. Το υλικό σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο κατά τη θετική φορά κίνησης. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης

β) τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί από τη θέση x_2 στη θέση x_1. Δίνεται $ημ\dfrac{\pi}{5} = 0{,}6$ και $ημ\dfrac{\pi}{3{,}4} = 0{,}8$.

11. Σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Κατά την ταλάντωσή του το σώμα περνά από μια θέση με ταχύτητα $υ_1 = 8$ m/sec και επιτάχυνση $α_1 = 5$ m/sec^2, και από μια δεύτερη θέση με $υ_2 = 10$ m/sec και επιτάχυνση $α_2 = 4$ m/sec^2. Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο κατά τη θετική φορά κίνησης. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης

β) το χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στη θέση x_1 για πρώτη φορά.

12. Σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α. Τη χρονική στιγμή t = 0 η απομάκρυνσή του είναι ίση με το μισό του πλάτους της ταλάντωσης ($x = +\frac{A}{2}$) και η ταχύτητά του θετική. Μετά από χρόνο Δt = 2 sec περνά από την ίδια θέση με αντίθετη ταχύτητα. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την περίοδο της ταλάντωσης του σώματος

β) την αρχική φάση της ταλάντωσης.

13. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α = 0,2 m και περιόδου Τ = π sec. Τη χρονική στιγμή μηδέν το υλικό σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

α) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης.

β) Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση $x_1 = 0{,}1\ \text{m}$ στη θέση $x_2 = -0{,}1\ \text{m}$, αν δίνεται ότι το υλικό σημείο περνάει από τη θέση x_2 κινούμενο i) προς τη θετική κατεύθυνση, ii) προς την αρνητική κατεύθυνση.

14. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο σημείων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 0,2 m. Τη χρονική στιγμή t = 0 η απομάκρυνση του υλικού σημείου είναι x = 0,05 m και η ταχύτητα του θετική με μέτρο $\upsilon = 0{,}2 \cdot \sqrt{3}\ \text{m/sec}$. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης και της ταχύτητας του υλικού σημείου σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης β) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ sec και

γ) να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή όπου η απομάκρυνση του υλικού σημείου είναι $x = -0{,}1$ m για πρώτη φορά.

15. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}2$ m και αρχική φάση φ_0. Μέσα στην πρώτη περίοδο της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$ sec και $t_2 = 2$ sec η απομάκρυνση του υλικού σημείου είναι $x_1 = 0{,}1 \cdot \sqrt{2}$ m και $x_2 = 0{,}1 \cdot \sqrt{3}$ m αντίστοιχα και η ταχύτητά του θετική. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του υλικού σημείου σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης

β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά.

16. Σώμα είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το ελεύθερο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, όταν το σώμα ισορροπεί στο λείο και οριζόντιο δάπεδο. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά $x = 0{,}2$ m και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε το λόγο των ταχυτήτων ταλάντωσης του σώματος, όταν αυτό περνά αντίστοιχα από τις θέσεις $x_1 = 0{,}1$ m και $x_2 = \frac{0{,}2}{3}$ m.

17. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης δίνεται από τη σχέση $x = -0{,}1 \cdot \eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Να υπολογίσετε

α) την αρχική φάση της ταλάντωσης

β) την απομάκρυνση και την ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος τη χρονική στιγμή t = 1,25 sec γ) το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το σώμα για πρώτη φορά στη θέση $x = 0{,}05$ m με αρνητική ταχύτητα.

18. Η εξίσωση της ταχύτητας ενός σώματος που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης δίνεται από τη σχέση $\upsilon = 2 \cdot \eta\mu(10 \cdot t + \frac{5\pi}{6})$ (S.I.). Να υπολογίσετε

α) την αρχική φάση της ταλάντωσης

β) την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ και

γ) το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το σώμα κατά την ταλάντωσή του για πρώτη φορά στη θέση $x = -0{,}1$ m με αρνητική ταχύτητα.

19. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και περνάει από δύο σημεία της τροχιάς του, Α και Β, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 0,2 m, με την ίδια ταχύτητα. Για τη μετάβαση από το σημείο Α στο Β απαιτείται χρονικό διάστημα $t_1 = 4$ sec. Μετά το πέρασμα του από το σημείο Β, το υλικό σημείο χρειάζεται χρονικό διάστημα $t_2 = 4$ sec για να περάσει πάλι από το σημείο Β, κινούμενο με αντίθετη φορά. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε

α) την περίοδο της ταλάντωσης και

β) το πλάτος της ταλάντωσης.