ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Α) Προβλήματα ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

1) Απλής εφαρμογής τύπων

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

i) Συμβολίζουμε τα δεδομένα και ζητούμενα με τα αντίστοιχα σύμβολα που θα χρησιμοποιούμε.

ii) Από την εκφώνηση προσδιορίζουμε το είδος της κίνησης.

iii) Γράφουμε τους αντίστοιχους τύπους και εξετάζουμε πόσους αγνώστους έχουμε και πόσες από τις εξισώσεις χρειαζόμαστε (αν θέλουμε πάνω από ένα άγνωστο χρησιμοποιούμε σύστημα με την μέθοδο της αντικατάστασης.

iv) Αν η κίνηση έχει ν κινήσεις σχεδιάζω σχήμα και μελετάμε τι συμβαίνει σε κάθε υποδιάστημα.

2) Προβλήματα διαδοχικών κινήσεων

Σ' αυτή την περίπτωση ένα κινητό εκτελεί δύο ή περισσότερες κινήσεις. Δηλαδή είναι δυνατό ένα κινητό να ξεκινά με ομαλή μετά να επιταχυνόμενη και στη συνέχεια να επιβραδύνεται.

Στα προβλήματα αυτά θα πρέπει να έχουμε υπόψη τα εξής:

ι) Σε κάθε μέγεθος που αντιστοιχεί για κάθε κίνηση θα βάζουμε δείκτη π.χ. το 1 για τα μεγέθη τις 1ης κίνησης το 2.

ιι) Αρχική ταχύτητα της επόμενης κίνησης είναι η τελική της προηγούμενης

ιιι) Στις περισσότερες περιπτώσεις έχουμε δύο ακόμη σχέσεις

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + \dots \;\; και \;\; t_{ολ} = t_1 + t_2 + \dots$$

Για την άνετη λύση θα ακολουθούμε στο πρόχειρο την εξής σειρά:

i) Σχεδιάζουμε σχήμα και τοποθετούμε διαφορετικούς δείκτες για κάθε κίνηση.

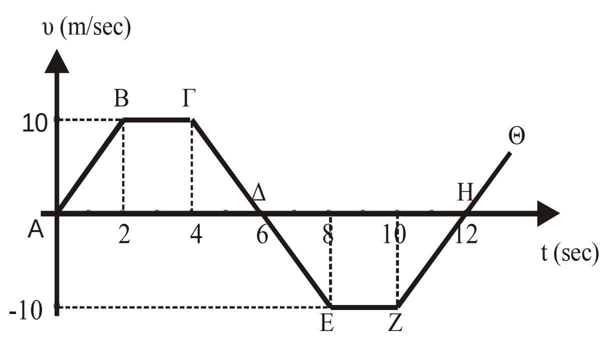
ii) Βρίσκουμε την κίνηση σε κάθε διάστημα και γράφουμε τις σχέσεις που ισχύουν προσέχοντας τους δείκτες των μεγεθών.

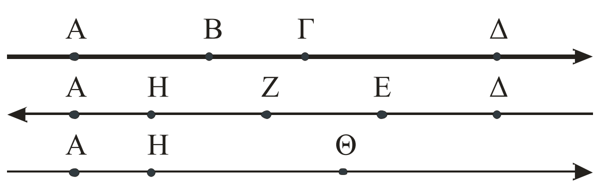
iii) Προσέχουμε ώστε η τελική ταχύτητα του προηγούμενου διαστήματος να είναι αρχική για το επόμενο διάστημα.

3) Προβλήματα γραφικών παραστάσεων

Στα προβλήματα αυτά πρέπει πάντα να σχεδιάζεται σε σχήμα η κίνηση του κινητού και μετά με βάση τα δεδομένα των γραφικών παραστάσεων να υπολογίζονται τα διάφορα μεγέθη. Στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου πρέπει να θυμούμαστε ότι

ΑΒ: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνομένη χωρίς αρχική ταχύτητα. Επειδή





η ταχύτητα είναι θετική το κινητό κινείται προς τον θετικό ημιάξονα.

ΒΓ: Κίνηση ομαλή διότι η ταχύτητα διατηρείται σταθερή. Επειδή η ταχύτητα είναι θετική το κινητό κινείται προς τον θετικό ημιάξονα.

ΓΔ: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη. Επειδή η ταχύτητα είναι θετική το κινητό κινείται προς τον θετικό ημιάξονα.

ΔΕ: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνομένη χωρίς αρχική ταχύτητα. Επειδή η ταχύτητα είναι αρνητική το κινητό κινείται προς τον αρνητικό ημιάξονα.

ΕΖ: Κίνηση ομαλή διότι η ταχύτητα διατηρείται σταθερή. Επειδή η ταχύτητα είναι αρνητική το κινητό κινείται προς τον αρνητικό ημιάξονα.

ΖΗ: : Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη. Επειδή η ταχύτητα είναι αρνητική το κινητό κινείται προς τον αρνητικό ημιάξονα.

ΗΘ: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνομένη χωρίς αρχική ταχύτητα. Επειδή η ταχύτητα είναι θετική το κινητό κινείται προς τον θετικό ημιάξονα.

Το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΓΔ δηλώνει το διάστημα που μετακινήθηκε το κινητό τα πρώτα 6sec ενώ το εμβαδόν του σχήματος ΔΕΖΗ δηλώνει το διάστημα που μετακινήθηκε το κινητό τα υπόλοιπα 6sec.

Οι κλίσεις των ευθειών ΑΒ και ΔΕ ορίζουν την επιτάχυνση κίνησης ενώ οι κλίσεις των ευθειών ΓΔ και ΖΗ ορίζουν την επιβράδυνση κίνησης.

$$\varepsilon\varphi\widehat{A} = \frac{10}{2} = 5 \qquad \varepsilon\varphi\widehat{\Delta} = \frac{-10}{2} = -5$$

Κάθε ευθεία ορίζεται από την μαθηματική της εξίσωση. Για παράδειγμα η ευθεία ΑΒ δίνεται από την σχέση $\psi = \alpha\chi \Rightarrow \upsilon = at \Rightarrow \upsilon = 5t$

ενώ η ευθεία ΓΔ από την $\psi = \beta + \alpha\chi \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + at \Rightarrow \upsilon = 10 - 5t$

4) Προβλήματα συναντήσεων κινητών

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο που αναφέραμε στην ομαλή κίνηση δηλαδή κατασκευάζουμε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα στο οποίο σημειώνουμε τις θέσεις των κινητών κατά τις διάφορες χρονικές στιγμές τις οποίες καθορίζει το πρόβλημα και παίρνουμε από το σχεδιάγραμμα τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων διαστημάτων.

5) Προβλήματα στα οποία δίδονται η ζητούνται διαστήματα τα οποία διανύονται σε ορισμένη χρονική περίοδο

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Α' τρόπος: *Αν ζητείται το διάστημα που διανύεται στο νιοστό sec μιας μεταβαλλόμενης κίνησης μπορούμε να βρούμε πρώτα το διάστημα* S_ν *που διανύεται σε ν sec μετά το διάστημα* $S_{\nu-1}$ *που διανύεται σε (ν-1) sec και να αφαιρέσουμε τα διαστήματα δηλ.* $S=S_\nu-S_{\nu-1}$

__Β' τρόπος:__ *(συμφέρει από άποψη πράξεων)*

Εξετάζουμε κατευθείαν την κίνηση στο χρονικό διάστημα το οποίο μας ενδιαφέρει προσέχοντας να τοποθετήσουμε σωστά την αρχική ταχύτητα του κινητού και το κατάλληλο χρόνο δηλαδή για το νιοστό sec θα έχουμε:

$$s_{\nu} = \upsilon_{\nu-1}.t + \frac{1}{2}.a.t^2 \text{ όπου } t=1sec$$

__ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $1^{ο}$__

Δύο σταθμοί απέχουν μεταξύ τους απόσταση ΑΒ=8 Km. Ένα τραίνο διανύει την απόσταση αυτή σε χρόνο t=220 sec. Στην αρχή η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη για χρόνο t_1=20sec στη συνέχεια γίνεται ομαλή και τέλος επιβραδύνεται για χρόνο t_3=20 sec οπότε το τραίνο σταματά στο σταθμό Β. Να υπολογίσετε

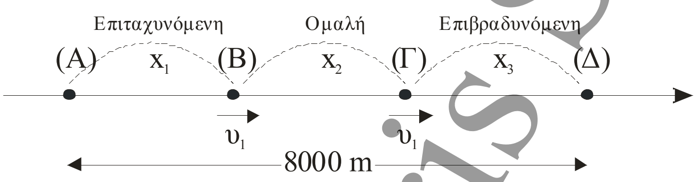
α) την επιτάχυνση όταν η κίνηση του τραίνου ήταν ομαλά μεταβαλλόμενη

β) τα διαστήματα τα οποία διανύει το τραίνο σε κάθε φάση της κίνησής του

γ) να σχεδιάσετε τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου υ=f(t), επιτάχυνσης – χρόνου α=f(t) και διαστήματος – χρόνου x=f(t).

__ΛΥΣΗ__

Σχεδιάζουμε σχήμα στο οποίο δείχνουμε τις διαδοχικές κινήσεις του κινητού.



Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις χρονικές εξισώσεις για κάθε κίνηση χωριστά προσέχοντας να τοποθετούμε διαφορετικούς δείκτες η τελική ταχύτητα του προηγούμενου διαστήματος να είναι αρχική για το επόμενο διάστημα.

(ΑΒ): Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα

$$\upsilon_1 = \alpha_1.t_1 \quad (1)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1.t_1^{\,2} \quad (2)$$

(ΒΓ): Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$x_2 = \upsilon_1.t_2 \quad (3)$$

(ΓΔ): Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 - \alpha_3.t_3 \quad (4)$$

$$x_3 = \upsilon_1.t_3 - \frac{1}{2}\alpha_3.t_3^{\,2} \quad (5)$$

Ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις διαστημάτων και οι σχέσεις χρόνων δηλαδή

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8000 \quad (6)$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \Rightarrow 220 = 20 + t_2 + 20 \Rightarrow t_2 = 180 \text{ sec}$$

Αντικαθιστώ τις σχέσεις (2), (3) και (5) στην σχέση (6) και έχω

$$(6)\Rightarrow \frac{1}{2}a_1.t_1^2+\upsilon_1.t_2+\upsilon_1.t_3-\frac{1}{2}a_3.t_3^2=8000\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}a_1.20^2+\upsilon_1.180+\upsilon_1.20-\frac{1}{2}a_3.20^2=8000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200.a_1+200.\upsilon_1-200.a_3=8000\Rightarrow a_1+\upsilon_1-a_3=40\ (7)$$

α) Οι σχέσεις (1) και (4) με αντικατάσταση δίνουν

$$\begin{array}{l} (1)\Rightarrow \upsilon_1=20.\alpha_1\ \ (8) \\ (4)\Rightarrow 0=\upsilon_1-20.\alpha_3\Rightarrow \upsilon_1=20.\alpha_3 \end{array} \Rightarrow a_1=a_3\ \ (9)$$

Οπότε η σχέση (7) σε συνάρτηση με τις (8) και (9) γράφεται

$$(7)\Rightarrow a_1+20.a_1-a_1=40\Rightarrow a_1=2\ \ m/sec^2$$

$$(8)\Rightarrow \upsilon_1=20.\alpha_1\Rightarrow \upsilon_1=40\ m/sec$$

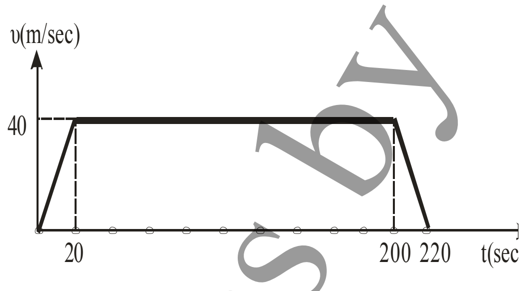
β) Τα διαστήματα υπολογίζονται από τις σχέσεις τους

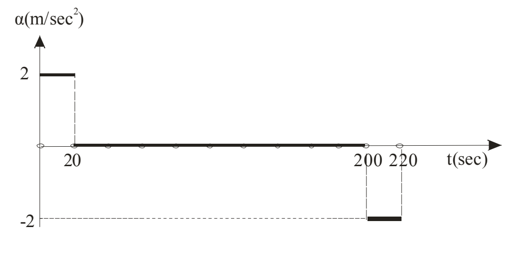
$$(2)\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}2.20^2\Rightarrow x_1=400\ m$$

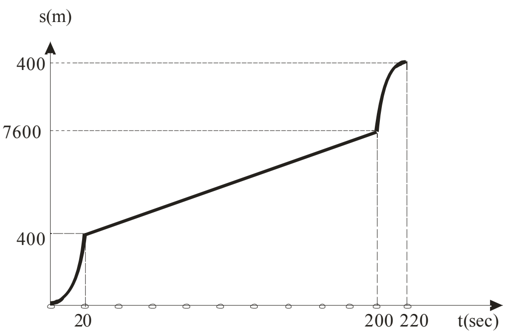
$$(3)\Rightarrow x_2=40.180\Rightarrow x_2=7200\ m$$

$$(5)\Rightarrow x_3=40.20-\frac{1}{2}2.20^2\Rightarrow x_3=800-400\Rightarrow x_3=400\ m$$

γ) Τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου υ=f(t), επιτάχυνσης – χρόνου α=f(t) και διαστήματος – χρόνου x=f(t) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα







ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Ένα κινητό ξεκινά από την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα. Μετά από χρόνο t_1=30 sec ο οδηγός διαπιστώνει ότι η ταχύτητά του είναι υ_1=60 m/sec και διατηρεί την ταχύτητα του κινητού σταθερή για τα επόμενα t_2=10 sec. Κατόπιν αντιλαμβάνεται κάποιο εμπόδιο και επιβραδύνει ομαλά το κινητό οπότε και σταματά μετά από χρόνο t_3=15 sec από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνει το κινητό. Να υπολογίσετε

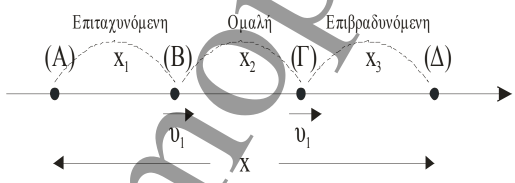
α) την ταχύτητα του κινητού τη στιγμή που αρχίζει να επιβραδύνεται

β) το ολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό και

γ) να σχεδιάσετε τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου υ=f(t), επιτάχυνσης – χρόνου α=f(t).

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε σχήμα στο οποίο δείχνουμε τις διαδοχικές κινήσεις του κινητού.



Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις χρονικές εξισώσεις για κάθε κίνηση χωριστά προσέχοντας να τοποθετούμε διαφορετικούς δείκτες η τελική ταχύτητα του προηγούμενου διαστήματος να είναι αρχική για το επόμενο διάστημα.

(ΑΒ): Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα

$$\upsilon_1 = \alpha_1 . t_1 \quad (1)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 . t_1^{\,2} \quad (2)$$

(ΒΓ): Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$x_2 = \upsilon_1 . t_2 \quad (3)$$

(ΓΔ): Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 - \alpha_3 . t_3 \quad (4)$$

$$x_3 = \upsilon_1 . t_3 - \frac{1}{2}\alpha_3 . t_3^{\,2} \quad (5)$$

Ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις διαστημάτων δηλαδή

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad (6)$$

Κάνοντας αντικαταστάσεις στις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$(1) \Rightarrow 60 = \alpha_1 .30 \Rightarrow a_1 = 2 \ \ m/sec^2$$

$$(2) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}.2.20^2 \Rightarrow x_1 = 400 \ \ m$$

$$(3) \Rightarrow x_2 = 60.10 \Rightarrow x_2 = 600 \ \ m$$

$$(4) \Rightarrow 0 = 60 - \alpha_3 .20 \Rightarrow 60 = \alpha_3 .15 \Rightarrow \alpha_3 = 4 \ \ m/sec^2$$

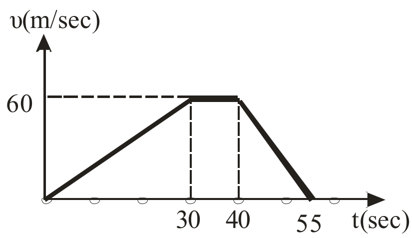
$$(5) \Rightarrow x_3 = 60.15 - \frac{1}{2}4.15^2 \Rightarrow x_3 = 900 - 450 \Rightarrow x_3 = 450 \ \ m$$

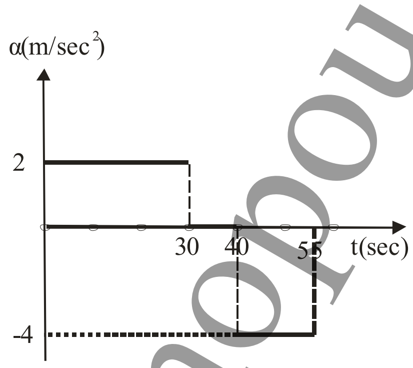
α) η ταχύτητα του κινητού τη στιγμή που αρχίζει να επιβραδύνεται είναι ίση με υ=60 m/sec

β) το ολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό υπολογίζεται από την σχέση (6)

$$(6) \Rightarrow x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x = 400 + 600 + 450 \Rightarrow x = 1450\ \ m$$

γ) Τα διαγράμ- ματα ταχύτητας– χρόνου υ=f(t), επιτάχυνσης – χρόνου α=f(t) και διαστήματος – χρόνου x=f(t) φαίνονται στο διπλανό σχήμα





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου σε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση να καθορίσετε το είδος της κίνησης στα χρονικά διαστήματα από 0-2 h, 2-4 h και 4-10 h και να υπολογίσετε

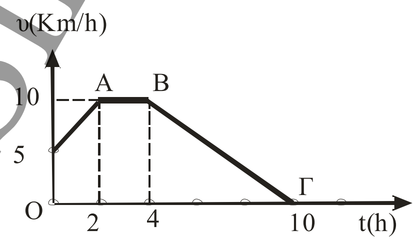
α) την επιτάχυνση του κινητού στο χρονικό διάστημα 0-2 sec.

β) την επιβράδυνση του κινητού το χρονικό διάστημα 4-10 h.

γ) την ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή 1h

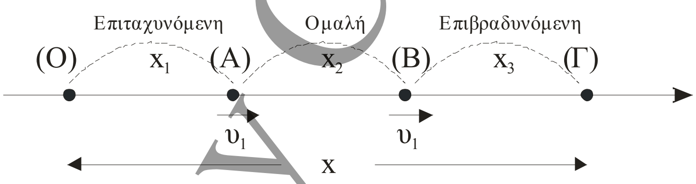
δ) τα διαστήματα που διανύει το κινητό στα χρονικά διαστήματα από 0-2 h, 2-4 h και 4-10 h και

ε) το συνολικό διάστημα που μετακινήθηκε το κινητό.



ΛΥΣΗ

α) Σχεδιάζουμε σχήμα στο οποίο δείχνουμε τις διαδοχικές κινήσεις του κινητού.



(ΟΑ): Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα διότι η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1 . t_1 \quad (1)$$

$$x_1 = \upsilon_0 . t_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 . t_1^2 \quad (2)$$

(ΑΒ): Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση διότι η ταχύτητα του κινητού παραμένει σταθερή

$$x_2 = \upsilon_1 . t_2 \quad (3)$$

(ΒΓ): Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση διότι η ταχύτητα του κινητού μειώνεται

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 - \alpha_3 . t_3 \quad (4)$$

$$x_3 = \upsilon_1.t_3 - \frac{1}{2}\alpha_3.t_3^{\,2} \quad (5)$$

Ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις διαστημάτων και χρόνων δηλαδή

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad (6)$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \quad (7)$$

Από την σχέση (1) έχουμε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

$$(1) \Rightarrow 10 = 5 + \alpha_1.2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{10-5}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 2{,}5\ Km/h^2$$

β) Από την σχέση (4) έχουμε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

$$(4) \Rightarrow 0 = 10 - \alpha_3.6 \Rightarrow 6.\alpha_3 = 10 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{10}{6} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{5}{3}\ Km/h^2$$

γ) Η ταχύτητα του κινητού την χρονική στιγμή t=1 h υπολογίζεται από την σχέση (1)

$$(1) \Rightarrow \upsilon_1' = 5 + 2{,}5.1 \Rightarrow \upsilon_1' = 7{,}5\ Km/h$$

δ) Τα διαστήματα που διανύει το κινητό στα χρονικά διαστήματα από 0-2 h, 2-4 h και 4-10 h δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις

$$(2) \Rightarrow x_1 = 5.2 + \frac{1}{2}2{,}5.2^2 \Rightarrow x_1 = 10 + 5 \Rightarrow x_1 = 15\ Km$$

$$(3) \Rightarrow x_2 = 10.2 \Rightarrow x_2 = 20\ Km$$

$$(5) \Rightarrow x_3 = 10.6 - \frac{1}{2}\frac{5}{3}.6^2 \Rightarrow x_3 = 60 - 30 \Rightarrow x_3 = 30\ Km$$

ε) το συνολικό διάστημα που μετακινήθηκε το κινητό δίνεται από την σχέση (6)

$$(6) \Rightarrow x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x = 15 + 20 + 30 \Rightarrow x = 65\ km$$

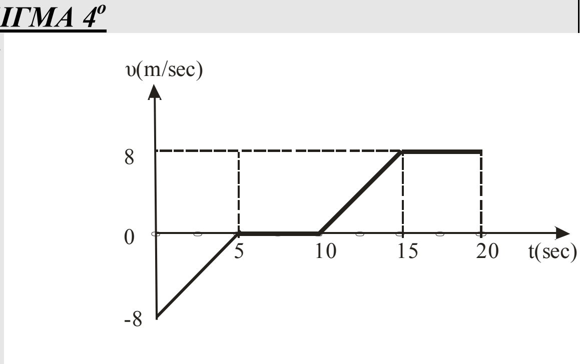
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου ενός σώματος που κινείται στον άξονα x΄x φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε

α) την επιτάχυνση του σώματος στα χρονικά διαστήματα από t_1=5sec έως t_2=10 sec και από t_2=10sec έως t_3=15sec

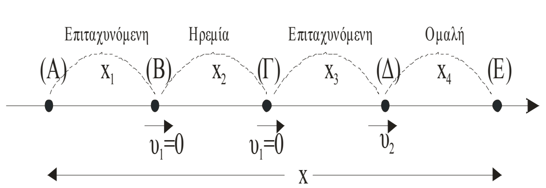
β) το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα στο χρόνο των 20 sec και

γ) να σχεδιάσετε το διάγραμμα επιτάχυνσης-χρόνου.



ΛΥΣΗ

α) Σχεδιάζουμε σχήμα στο οποίο δείχνουμε τις διαδοχικές κινήσεις του κινητού.



(ΑΒ): Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα διότι η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται κινούμενο προς τον αρνητικό ημιάξονα x΄x αφού η ταχύτητα στο διάγραμμα είναι αρνητική.

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1.t_1 \quad (1)$$

$$x_1 = \upsilon_0.t_1 + \frac{1}{2}\alpha_1.t_1^{\,2} \quad (2)$$

(ΒΓ): Ηρεμία διότι η ταχύτητα του κινητού παραμένει σταθερή και ίση με μηδέν

$$x_2 = 0 \quad (3)$$

(ΓΔ): Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα διότι η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται

$$\upsilon_2 = \alpha_3.t_3 \quad (4)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\alpha_3.t_3^{\,2} \quad (5)$$

(ΑΒ): Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση διότι η ταχύτητα του κινητού παραμένει σταθερή

$$x_4 = \upsilon_2.t_4 \quad (6)$$

Ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις διαστημάτων και χρόνων δηλαδή

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad (7)$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \quad (8)$$

Η επιτάχυνση του σώματος στα χρονικά διαστήματα από t_1=5sec έως t_2=10 sec είναι ίση με μηδέν αφού το σώμα ηρεμεί. Η επιτάχυνση του σώματος στα χρονικά διαστήματα από t_1=10 sec έως t_2=15 sec υπολογίζεται από την σχέση (4)

$$(4) \Rightarrow 8 = \alpha_3.5 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{8}{5} \Rightarrow \alpha_3 = 1{,}6 \ \ m/sec^2$$

β) Υπολογίζουμε πρώτα τα διαστήματα που διανύει το κινητό επιμέρους και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην σχέση (7). Για τον υπολογισμό του διαστήματος x_1 πρέπει να γνωρίζω την επιτάχυνση της κίνησης. Έτσι ξεκινώ αρχικά από την σχέση (1)

$$(1) \Rightarrow -8 = 0 + \alpha_1.5 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-8}{5} \Rightarrow \alpha_1 = -1{,}6 \ \ m/sec^2$$

Προσέξτε ότι το αρνητικό πρόσημο δηλώνει επιτάχυνση και όχι επιβράδυνση διότι κινείται προς τον αρνητικό ημιάξονα x΄x

$$(2) \Rightarrow x_1 = -8.5 + \frac{1}{2}(-1{,}6).5^2 \Rightarrow x_1 = -40 - 20 \Rightarrow x_1 = -60 \ \ m$$

$$(3) \Rightarrow x_2 = 0$$

$$(5) \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}1{,}6.5^2 \Rightarrow x_3 = 20 \ \ m$$

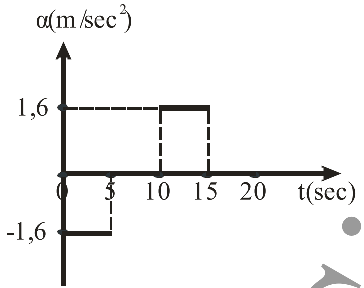
$$(6) \Rightarrow x_4 = 8.5 \Rightarrow x_4 = 40 \ \ m$$

Οπότε το συνολικό διάστημα είναι ίσο με

$$(7) \Rightarrow x = 60 + 0 + 20 + 40 \Rightarrow x = 120 \;\; m$$

Προσέξτε ότι δεν λάβαμε υπόψη το αρνητικό πρόσημο του διαστήματος x_1 διότι το διάστημα είναι μονόμετρο μέγεθος. Αν ζητούσαμε την μετατόπιση τότε το πρόσημο του διαστήματος x_1 λαμβάνεται υπόψη.

γ) Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου α=f(t) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

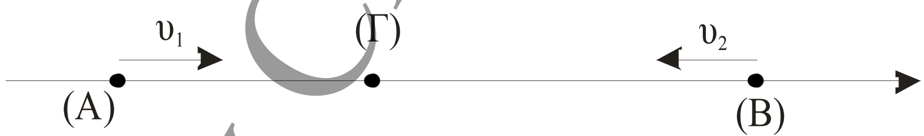


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5º

Δύο κινητά Α και Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση x=800 m και κινούνται με αντίθετη φορά στην ίδια ευθεία. Το κινητό Α κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_1=30 m/sec και το Β ξεκινά από την ηρεμία με σταθερή επιτάχυνση α_2=10 m/sec^2. Να υπολογίσετε το σημείο συνάντησης των κινητών.

ΛΥΣΗ

Τα κινητά ξεκινούν από τα σημεία Α και Β αντίστοιχα την ίδια χρονική στιγμή έχουν αντίθετες φορές και συναντώνται στο Γ τότε ισχύει ΑΒ=ΑΓ+ΒΓ.



Φαινόμενο: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του πρώτου κινητού

Εφαρμόζουμε: Χρονική εξίσωση κίνησης

$$x_1 = \upsilon_1 . t_1 \;\; (1)$$

Φαινόμενο: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του δεύτερου κινητού

Εφαρμόζουμε: Χρονικές εξισώσεις κίνησης

$$\upsilon_2 = \alpha_2 . t_2 \;\; (2)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 . t_2^2 \;\; (3)$$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις διαστημάτων και οι σχέσεις χρόνων

$$AB = x_1 + x_2 \;\; (4)$$

$$t = t_1 = t_2 \;\; (5)$$

Αντικαθιστώ στην σχέση (4) τις (1) και (3) και υπολογίζουμε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν τα κινητά

$$(3) \Rightarrow AB = x_1 + x_2 \Rightarrow AB = \upsilon_1 . t_1 + \frac{1}{2}.a_2.t_2^{\,2} \xrightarrow{(5)} AB = \upsilon_1 .t + \frac{1}{2}.a_2.t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 800 = 30.t + \frac{1}{2}.10.t^2 \Rightarrow 800 = 30.t + 5.t^2 \Rightarrow 5.t^2 + 30.t - 800 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + 6.t - 160 = 0$$

Λύνουμε το πιο πάνω τριώνυμο και προκύπτουν δύο λύσεις

$$t^2 + 6.t - 160 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.(-160)}}{2.1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+640}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{676}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-6 \pm 26}{2} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = \frac{-6+26}{2} \\ t_2 = \frac{-6-26}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = \frac{20}{2} \\ t_2 = \frac{-32}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = 10\ sec \\ t_2 = -16\ sec \end{matrix}$$

Από τις δύο λύσεις δεκτή είναι η πρώτη. Άρα t=10 sec

Αντικαθιστώντας στις (1) ή (2) υπολογίζουμε το σημείο συνάντησης

$$x_1 = 30.10 \Rightarrow x_1 = 300\ \ m$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ο

Ένα κινητό ξεκινά την κίνησή του από τυχαίο σημείο Α με σταθερή ταχύτητα υ_1=72 Km/h. Μετά από χρόνο t=3 sec ξεκινά από το ίδιο σημείο Α ένα δεύτερο κινητό με αρχική ταχύτητα υ_{02}=12 m/sec και σταθερή επιτάχυνση α_2=2 m/sec^2. Να υπολογίσετε πού και πότε θα συναντηθούν.

ΛΥΣΗ

Αρχικά μετατρέπω την ταχύτητα υ_1 στο σύστημα S.I.

$$\upsilon_1 = 72\frac{Km}{h} = 72\frac{1000\,m}{3600\,sec} \Rightarrow \upsilon_1 = 20\ \ m/sec$$

Τα δύο κινητά ξεκινούν από το ίδιο σημείο Α διαφορετική χρονική στιγμή έχουν την ίδια φορά κίνησης και συναντώνται στο σημείο Β. Άρα διανύουν το ίδιο διάστημα σε διαφορετικό χρόνο.

Φαινόμενο: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του πρώτου κινητού

Εφαρμόζουμε: Χρονική εξίσωση κίνησης

$$x_1 = \upsilon_1 . t_1 \quad (1)$$

Φαινόμενο: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του δεύτερου κινητού

Εφαρμόζουμε: Χρονικές εξισώσεις κίνησης

$$\upsilon_2 = \upsilon_{02} + \alpha_2 . t_2 \quad (2)$$

$$x_2 = \upsilon_{02} . t_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 . t_2^{\ 2} \quad (3)$$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις διαστημάτων και οι σχέσεις χρόνων

$$AB = x_1 = x_2 \quad (4)$$

$$t_2 = t_1 - 3 \quad (5)$$

Αντικαθιστώ στην σχέση (4) τις (1) και (3) και υπολογίζουμε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν τα κινητά

$$(3) \Rightarrow AB = x_1 = x_2 \Rightarrow \upsilon_1 . t_1 = \upsilon_{02} . t_2 + \frac{1}{2} . a_2 . t_2^{\ 2} \xrightarrow{(5)}$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 . t_1 = \upsilon_{02} . (t_1 - 3) + \frac{1}{2} . a_2 . (t_1 - 3)^2 \Rightarrow 20. t_1 = 12.(t_1 - 3) + \frac{1}{2} . 2.(t_1 - 3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20. t_1 = 12. t_1 - 36 + t_1^{\ 2} - 6. t_1 + 9 \Rightarrow 20. t_1 = 6. t_1 - 27 + t_1^{\ 2} \Rightarrow t_1^{\ 2} - 14. t_1 - 27 = 0$$

Λύνουμε το πιο πάνω τριώνυμο και προκύπτουν δύο λύσεις

$$t_1^{\ 2} - 14. t_1 - 27 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4.1.(-27)}}{2.1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 108}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{304}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-14 \pm 17{,}44}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-14 + 17{,}44}{2} \\ t_2 = \dfrac{-14 - 17{,}44}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3{,}44}{2} \\ t_2 = \dfrac{-31{,}44}{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 1{,}72 \ sec \\ t_2 = -15{,}72 \ sec \end{array}$$

Από τις δύο λύσεις δεκτή είναι η πρώτη. Άρα t=1,72 sec

Αντικαθιστώντας στις (1) ή (2) υπολογίζουμε το σημείο συνάντησης

$$x_1 = 20.1{,}72 \Rightarrow x_1 = 34{,}4 \ m$$

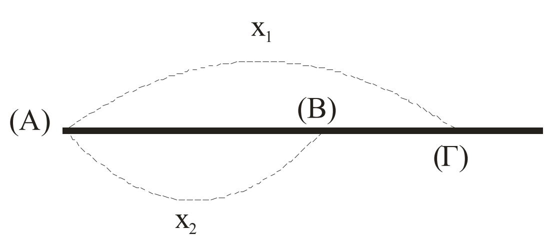
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7ο

Να υπολογίσετε σε ποιο δευτερόλεπτο (sec) ένα κινητό που κινείται με αρχική ταχύτητα υ_o=50 m/sec ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα με σταθερή επιτάχυνση α=10 m/sec^2 έχει διανύσει διάστημα x=145 m.

ΛΥΣΗ

α) Σχεδιάζουμε σχήμα στο οποίο δείχνουμε την κίνηση του κινητού.

Σε χρόνο t_1 το κινητό έχει διανύσει απόσταση x_1 ενώ σε χρόνο t_1-1 έχει διανύσει απόσταση x_2. Ισχύει



$$x = x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = 145 \quad (1)$$

Φαινόμενο: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

<u>*Εφαρμόζουμε: Χρονικές εξισώσεις κίνησης*</u>

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha . t \quad (2)$$

$$x = \upsilon_0 . t + \frac{1}{2} \alpha . t^2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την σχέση (3) στην σχέση (1) τις δύο χρονικές στιγμές

$$(1) \Rightarrow \upsilon_0 . t_1 + \frac{1}{2} \alpha . t_1^{\ 2} - (\upsilon_0 . t_2 + \frac{1}{2} \alpha . t_2^{\ 2}) = 145 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50.t_1 + \frac{1}{2} 10.t_1^{\ 2} - 50.t_2 - \frac{1}{2} 10.t_2^{\ 2} = 145 \Rightarrow 50.t_1 + 5.t_1^{\ 2} - 50.t_2 - 5.t_2^{\ 2} = 145 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50.t_1 + 5.t_1^{\ 2} - 50.(t_1 - 1) - 5.(t_1 - 1)^2 = 145 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50.t_1 + 5.t_1^{\ 2} - 50.t_1 + 50 - 5.(t_1^{\ 2} - 2.t_1 + 1) = 145 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5.t_1^{\ 2} + 50 - 5t_1^{\ 2} + 10.t_1 - 5 = 145 \Rightarrow 10.t_1 + 45 = 145 \Rightarrow 10.t_1 = 145 - 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10.t_1 = 100 \Rightarrow t_1 = 10 \ \ sec$$

Επομένως στο 10^o sec το κινητό διανύει την απόσταση των 145 m

<u>*ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8^o*</u>

Κινητό που αρχίζει την κίνησή του με αρχική ταχύτητα υ_o=5 m/sec και σταθερή επιτάχυνση α=3 m/sec^2 διανύει κατά τα 2 τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησης του τα 8/25 του συνολικού διανυθέντος διαστήματος. Να υπολογίσετε

α) Το χρόνο κίνησης του κινητού

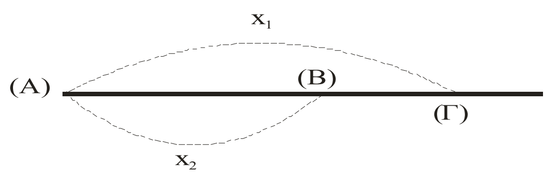
β) Το ολικό διάστημα που διανύει το κινητό και

γ) Την τελική ταχύτητα του κινητού.

<u>*ΛΥΣΗ*</u>

α) Σχεδιάζουμε σχήμα στο οποίο δείχνουμε την κίνηση του κινητού.

Σε χρόνο t_1 το κινητό έχει διανύσει απόσταση x_1 ενώ σε χρόνο t_1-2 έχει διανύσει απόσταση x_2. Ισχύει



$$(B\Gamma) = x_1 - x_2 \Rightarrow \frac{8}{25} . x_1 = x_1 - x_2 \Rightarrow \frac{8}{25} . x_1 - x_1 = -x_2 \Rightarrow \frac{17}{25} x_1 = x_2 \ (1)$$

<u>*Φαινόμενο: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση*</u>

<u>*Εφαρμόζουμε: Χρονικές εξισώσεις κίνησης*</u>

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha . t \quad (2)$$

$$x = \upsilon_0 . t + \frac{1}{2} \alpha . t^2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την σχέση (3) στην σχέση (1) τις δύο χρονικές στιγμές

$$(1)\Rightarrow \frac{17}{25}(\upsilon_0.t_1+\frac{1}{2}\alpha.t_1^{\,2})=\upsilon_0.t_2+\frac{1}{2}\alpha.t_2^{\,2}\Rightarrow \frac{17}{25}(5.t_1+\frac{1}{2}3.t_1^{\,2})=5.t_2+\frac{1}{2}3.t_2^{\,2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{17}{5}.t_1+\frac{51}{50}.t_1^{\,2}=5.(t_1-2)+\frac{1}{2}3.(t_1-2)^2\Rightarrow \frac{17}{5}.t_1+\frac{51}{50}.t_1^{\,2}=$$

$$=5.t_1-10+\frac{3}{2}.(t_1^{\,2}-4.t_1+4)\Rightarrow \frac{17}{5}.t_1+\frac{51}{50}.t_1^{\,2}=5.t_1-10+\frac{3}{2}.t_1^{\,2}-\frac{3}{2}.4.t_1+\frac{3}{2}.4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3,4.t_1+1,02.t_1^{\,2}=5.t_1-10+1,5.t_1^{\,2}-6.t_1+6\Rightarrow 1,5.t_1^{\,2}-1,02.t_1^{\,2}-4,4.t_1-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,48.t_1^{\,2}-4,4.t_1-4=0\Rightarrow 0,12.t_1^{\,2}-1,1.t_1-1=0$$

Λύνουμε το πιο πάνω τριώνυμο και προκύπτουν δύο λύσεις

$$0,12\,t_1^{\,2}-1,1.t_1-1=0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{+1,1\pm\sqrt{1,1^2-4.0,12.(-1)}}{2.0,12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1,1\pm\sqrt{1,21+0,48}}{0,24}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1,1\pm\sqrt{1,69}}{0,24}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1,1\pm 1,3}{0,24}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} t_1=\dfrac{1,1+1,3}{0,24} \\ t_2=\dfrac{1,1-1,3}{0,24}\end{array}\Rightarrow \begin{array}{l} t_1=\dfrac{2,4}{0,24} \\ t_2=\dfrac{-0,2}{0,24}\end{array}\Rightarrow \begin{array}{l} t_1=10\ sec \\ t_2=-0,83\,sec\end{array}$$

Επομένως ο χρόνος κίνησης του κινητού είναι ίσος με 10 sec.

β) Αντικαθιστούμε στην σχέση (3) και υπολογίζουμε το συνολικό διάστημα

$$(3)\Rightarrow x_1=5.10+\frac{1}{2}3.10^2\Rightarrow x_1=50+150\Rightarrow x_1=200\ \ m$$

γ) Η τελική ταχύτητα του κινητού είναι ίση με

$$(2)\Rightarrow \upsilon=5+3.10\Rightarrow \upsilon=35\ \ m/sec$$