ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ

Παρακάτω θα αναφέρουμε τον τρόπο που ακολουθούμε σε κάθε άσκηση για να υπολογίσουμε τη συνολική δύναμη που ενεργεί σε ένα σώμα ή να αναλύσουμε τις διάφορες δυνάμεις σε άλλες.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΠΟΥ ΕΝΕΡΓΕΙ ΣΕ ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.

Ανάλυση δύναμης ονομάζουμε την αντικατάσταση μιας δύναμης από δύο ή περισσότερες δυνάμεις οι οποίες προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό και πρώτης δύναμης. Γενικά τα προβλήματα της ανάλυσης των δυνάμεων λύνονται με πάρα πολλούς τρόπους. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση ανάλυσης δύναμης είναι αυτή του υπολογισμού της συνισταμένης που θα αναφέραμε παρακάτω.

Στην περίπτωση της ανάλυσης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

α) Όταν μας δίνουν τις διευθύνσεις των συνιστωσών.

β) Όταν δίδεται η μία δύναμη κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά (χρησιμοποιούμε για την λύση του προβλήματος τον τύπο της συνισταμένης και το νόμο των ημιτόνων).

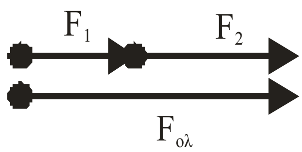
ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΟΥ ΕΝΕΡΓΟΥΝ ΣΕ ΥΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.

Σύνθεση δύο ή περισσότερων δυνάμεων λέμε την διαδικασία εύρεσης της συνιστάμενης τους.

Συνισταμένη δύο ή περισσότερων δυνάμεων λέμε την αντικατάστασή τους από μία δύναμη που προκαλεί τα ίδια αποτελέσματα με τις άλλες δυνάμεις (συνιστώσες).

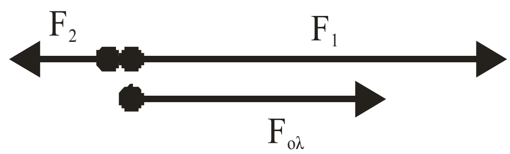
Στην σύνθεση των δυνάμεων εμφανίζονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) Συγγραμικές της ίδιας φοράς: Η συνισταμένη δύο δυνάμεων που ενεργούν στο ίδιο σημείο, είναι της ίδιας διεύθυνσης και φοράς είναι μια δύναμη με το ίδιο σημείο εφαρμογής, την ίδια διεύθυνση και φορά με τις συνιστώσες και έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστουσών.



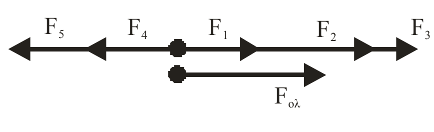
$$F_{ολ} = F_1 + F_2$$

ii) Συγγραμικές αντιθέτου φοράς: Η συνισταμένη δύο δυνάμεων που ενεργούν στο ίδιο σημείο, είναι της ίδιας διεύθυνσης και αντιθέτου φοράς είναι μια δύναμη με το ίδιο σημείο εφαρμογής, την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες, φορά την φορά της μεγαλύτερης των δυνάμεων και έχει μέτρο ίσο με την διαφορά των μέτρων των συνιστουσών.



$$F_{ολ} = F_1 - F_2$$

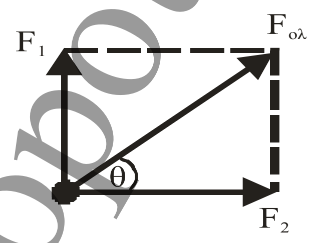
Εάν οι δυνάμεις είναι περισσότερες από δύο τότε διαλέγουμε αυθαίρετα την θετική και αρνητική



φορά. Στη περίπτωση αυτή η συνισταμένη είναι μια δύναμη με το ίδιο σημείο εφαρμογής και την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες δυνάμεις έχει δε μέτρο ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των μέτρων των συνιστουσών και θα έχει θετική φορά αν το σημείο του αλγεβρικού αθροίσματος είναι θετικό και αρνητική φορά αν ε το σημείο του αλγεβρικού αθροίσματος είναι αρνητικό.

$$F_{ολ} = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 - F_5$$

iii) Αν οι δυνάμεις σχηματίζουν ορθή γωνία: Η συνισταμένη τους δίνεται από τη διαγώνιου του ορθογωνίου το οποίο σχηματίζεται με πλευρές τις δύο δυνάμεις και έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής με τις συνιστώσες δυνάμεις. Το μέτρο της υπολογίζεται από το πυθαγόρειο θεώρημα



$$F_{ολ}{}^2 = F_1^2 + F_2^2$$

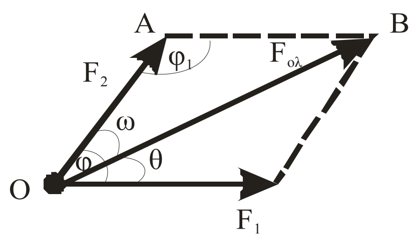
και η διεύθυνσή της από την εφαπτομένη του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζει η διεύθυνση της μίας συνιστώσας με την διεύθυνση της άλλης συνιστώσας.

$$εφθ = \frac{F_1}{F_2}$$

iv) Αν οι δυνάμεις σχηματίζουν τυχαία γωνία: Αν οι δυνάμεις των σωμάτων του συστήματος δεν έχουν την ίδια διεύθυνση χρησιμοποιώ τους πιο κάτω τρόπους για τον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης.

<u>1ος τρόπος: Μέθοδος παραλληλογράμμου</u>

Η συνισταμένη των δυνάμεων δίνεται από την διαγώνιο του παραλληλογράμμου το οποίο σχηματίζεται με πλευρές τις δύο δυνάμεις και έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής με τις συνιστώσες. Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από την σχέση



$$F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συνφ}$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο συνιστώσες F_1 και F_2.

Η διεύθυνση της συνισταμένης καθορίζεται από τις γωνίες θ ή ω τις οποίες σχηματίζουν η διεύθυνση της συνισταμένης με τις διευθύνσεις των συνιστουσών F_1 και F_2. Οι γωνίες αυτές υπολογίζονται με εφαρμογή του θεωρήματος των ημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ δηλαδή

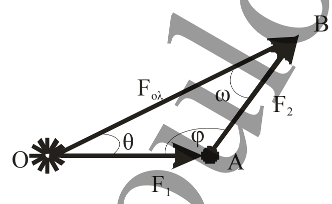
$$\frac{F_1}{ημω} = \frac{F_2}{ημθ} = \frac{F_{ολ}}{ημφ_1} \Rightarrow \frac{F_1}{ημω} = \frac{F_2}{ημθ} = \frac{F_{ολ}}{ημφ} \text{ διότι } φ_1+φ=180^0$$

ή από τη γνωστή σχέση

$$εφθ = \frac{F_2.ημφ}{F_1 + F_2.συνφ}$$

2ος τρόπος: Μέθοδος συνημίτονων

Σχεδιάζω τα ανύσματα και προσθέτω αυτά διανυσματικά ανά δύο ώστε να σχηματίζεται πάντοτε ένα τρίγωνο. Για παράδειγμα έστω δύο ανύσματα $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ. Σχεδιάζοντας με βάση το άθροισμα ανυσμάτων το τρίγωνο έχω την σχέση



$$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2συνφ}$$

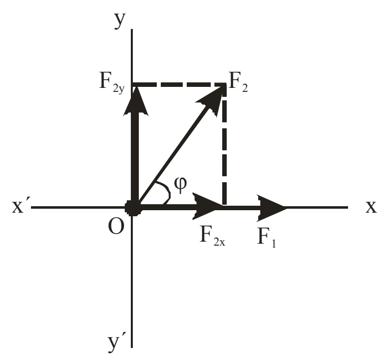
Προσοχή στο σχεδιασμό του διανυσματικού αθροίσματος πρέπει να καθορίζω πάντα το σημείο που αρχίζω τον σχεδιασμό (θα σημειώνεται με αστερίσκο) και το σημείο που σταματώ.*

Η διεύθυνση της $F_{ολ}$ με ένα από τα διανύσματα των δυνάμεων F_1 ή F_2 καθορίζεται από το νόμο των ημιτόνων ως εξής:

$$\frac{F_1}{ημω} = \frac{F_2}{ημθ} = \frac{F_{ολ}}{ημφ}$$

3ος τρόπος: Μέθοδος ανάλυσης σε άξονες

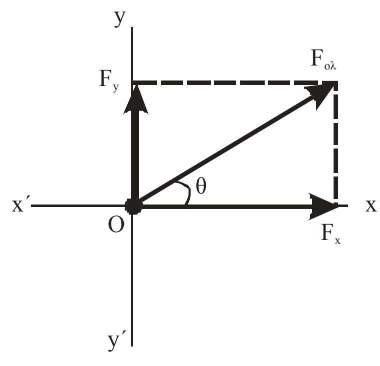
Αναλύω τα διανύσματα όλων των δυνάμεων που δίνονται σε δύο άξονες ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο (ή γενικά ένα κατά τη διεύθυνση των περισσοτέρων ανυσμάτων και ένα κάθετο σ' αυτά). Οι συνιστώσες των δυνάμεων υπολογίζονται εύκολα τριγωνομετρικά από τα ορθογώνια τρίγωνα που προκύπτουν με βάση το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών που δείχνουν τις διευθύνσεις των δυνάμεων.



$$F_{2x} = F_2.συνφ \quad και \quad F_{2y} = F_2.ημφ$$

Στη συνέχεια συνθέτω τις δυνάμεις που βρίσκονται στον ίδιο άξονα αλγεβρικά και υπολογίζω την συνισταμένη δύναμη σε κάθε άξονα χωριστά

$$F_x = F_1 + F_{2x} \quad και \quad F_y = F_{2y}$$



Εάν το αποτέλεσμα είναι θετικό οι συνιστώσες δυνάμεις F_x και F_y έχουν αντίστοιχα φορά προς τα δεξιά και προς τα πάνω ενώ αν είναι αρνητικό έχουν αντίστοιχα φορά προς τα αριστερά και προς τα κάτω. Τέλος με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζω την συνισταμένη δύναμη $F_{ολ}$.

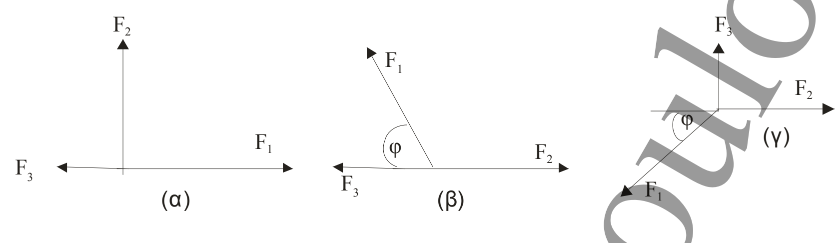
$$F_{ολ} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

και η διεύθυνση καθορίζεται από την εφαπτομένη

$$εφθ = \frac{F_y}{Fx}$$

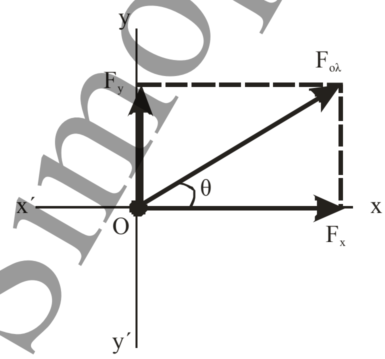
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Στα παρακάτω σχήμα τα φαίνεται η δράση τριών δυνάμεων σε ένα υλικό σημείο. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των ομοεπίπε δων δυνάμεων, που έχουν μέτρα $F_1=100$ Nt, $F_2=60$ Nt, $F_3=20$ Nt. Δίνονται συνφ= =0,6 ημφ=0,8.



ΛΥΣΗ

Επειδή οι δυνάμεις βρίσκονται τοποθετημένες στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων εφαρμόζουμε απευθείας μέθοδο αξόνων.



$$F_x = F_1 - F_3 \Rightarrow F_x = 100 - 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_x = 80 \ \ Nt$$

$$F_y = F_2 \Rightarrow F_y = 60 \ \ Nt$$

Με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζω την συνισταμένη δύναμη $F_{ολ}$.

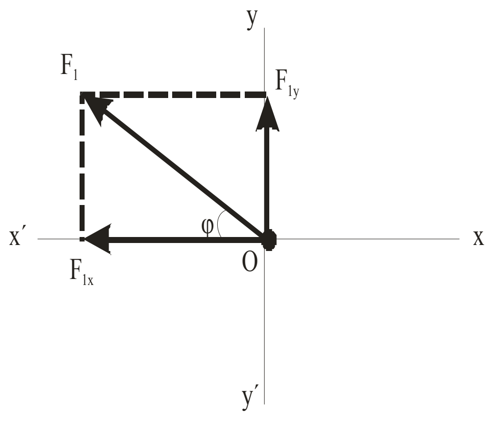
$$F_{ολ} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{80^2 + 60^2} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{6400 + 3600} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{10.000} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_{ολ} = 100 \ \ Nt$$

και η διεύθυνση καθορίζεται από την εφαπτομένη

$$\text{εφ}\theta = \frac{F_y}{Fx} \Rightarrow \text{εφ}\theta = \frac{60}{80} \Rightarrow \text{εφ}\theta = \frac{3}{4}$$

β) Επειδή οι δυνάμεις βρίσκονται τοποθετημένες στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων εφαρμόζουμε απευθείας μέθοδο αξόνων.

Αναλύουμε τη δύναμη F_1 σε συνιστώσες και τις υπολογίζουμε από τις σχέσεις ημιτόνου και συνημιτόνου.



$$ημφ = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{F_{1y}}{100} \Rightarrow F_{1y} = 80 \ Nt$$

$$συνφ = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{F_{1x}}{100} \Rightarrow F_{1x} = 60 \ Nt$$

Οπότε η συνισταμένη δύναμη σε κάθε άξονα είναι ίση με

$$F_x = F_3 - F_2 - F_{1x} \Rightarrow F_x = 20 - 60 - 60 \Rightarrow F_x = -100 \ \ Nt$$

$$F_y = F_{1y} \Rightarrow F_y = 80 \ \ Nt$$

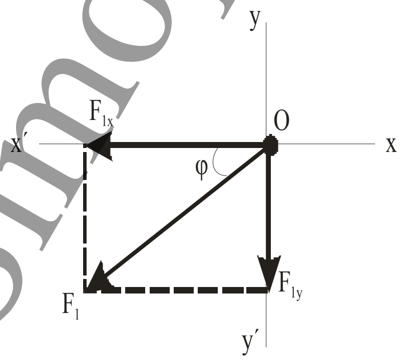
Με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζω την συνισταμένη δύναμη $F_{ολ}$.

$$F_{ολ} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{80^2 + 100^2} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{6400 + 10000} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{16.400} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_{ολ} = 128 \ \ Nt$$

και η διεύθυνση καθορίζεται από την εφαπτομένη

$$εφ\theta = \frac{F_y}{Fx} \Rightarrow εφ\theta = \frac{80}{100} \Rightarrow εφ\theta = 0{,}8$$

γ) Επειδή οι δυνάμεις βρίσκονται τοποθετημένες στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων εφαρμόζουμε απευθείας μέθοδο αξόνων.



Αναλύουμε τη δύναμη F_1 σε συνιστώσες και τις υπολογίζουμε από τις σχέσεις ημιτόνου και συνημιτόνου.

$$ημφ = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{F_{1y}}{100} \Rightarrow F_{1y} = 80 \ Nt$$

$$συνφ = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{F_{1x}}{100} \Rightarrow F_{1x} = 60 \ Nt$$

Οπότε η συνισταμένη δύναμη σε κάθε άξονα είναι ίση με

$$F_x = F_2 - F_{1x} \Rightarrow F_x = 60 - 60 \Rightarrow F_x = 0 \ \ Nt$$

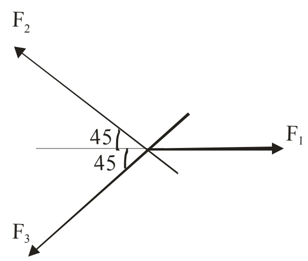
$$F_y = F_3 - F_{1y} \Rightarrow F_y = 20 - 80 \Rightarrow F_y = -60 \ \ Nt$$

Οπότε $F_{ολ}=F_y=-60$ Nt

και η διεύθυνση της είναι κατακόρυφη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο

Τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις, F_1, F_2 και F_3 που έχουν μέτρα $F_2 = F_3 = 10\sqrt{2} \ \ Nt$ και F_1=12 N έχουν εφαρμοστεί στο ίδιο υλικό σημείο. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη τους εφαρμόζοντας τη μέθοδο αξόνων. Δίνονται ημ45^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ και συν45^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



ΛΥΣΗ

Αναλύω τα διανύσματα όλων των δυνάμεων που δίνονται σε δύο άξονες ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο και υπολογίζω τις συνιστώσες τους από τα ορθογώνια τρίγωνα που δημιουργούνται με βάση τις τριγωνομετρικές σχέσεις.

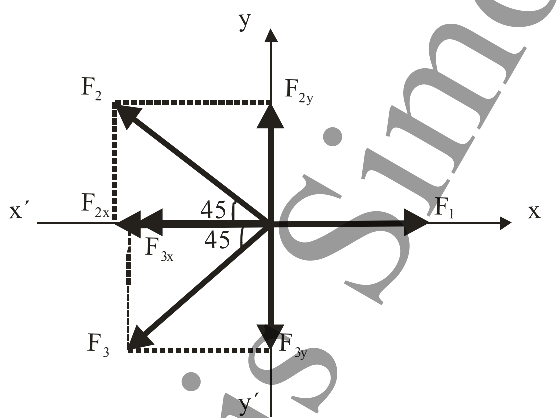
$$ημ45^0 = \frac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F_{2y}}{10\sqrt{2}} \Rightarrow F_{2y} = 10 \ \ Nt$$

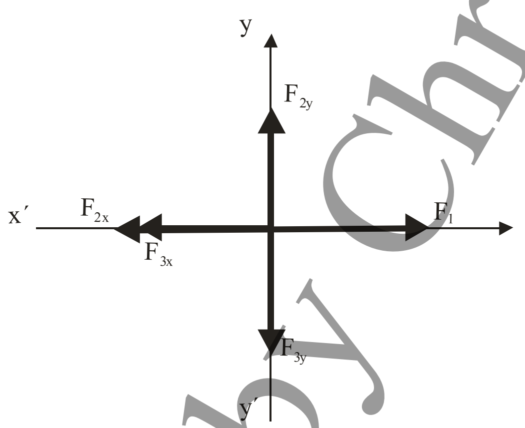
$$\sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F_{2x}}{10\sqrt{2}} \Rightarrow F_{2x} = 10 \;\; Nt$$

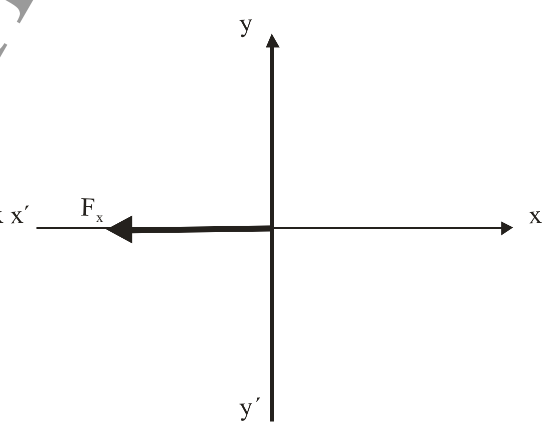
$$\eta\mu 45^0 = \frac{F_{3y}}{F_3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F_{3y}}{10\sqrt{2}} \Rightarrow F_{3y} = 10 \;\; Nt$$

$$\sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{F_{3x}}{F_3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F_{3x}}{10\sqrt{2}} \Rightarrow F_{3x} = 10 \;\; Nt$$

Στη συνέχεια συνθέτω τις δυνάμεις που βρίσκονται στον ίδιο άξονα αλγεβρικά και υπολογίζω την συνισταμένη δύναμη σε κάθε άξονα χωριστά







$$F_x = F_1 - F_{2x} - F_{3x} \Rightarrow F_x = 12 - 10 - 10 \Rightarrow F_x = -8 \;\; Nt$$

$$F_y = F_{2y} - F_{3y} \Rightarrow F_y = 10 - 10 \Rightarrow F_y = 0 \;\; Nt$$

Επομένως η συνισταμένη των τριών δυνάμεων είναι ίση με $F_{o\lambda} = -8 \;\; Nt$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο</u>

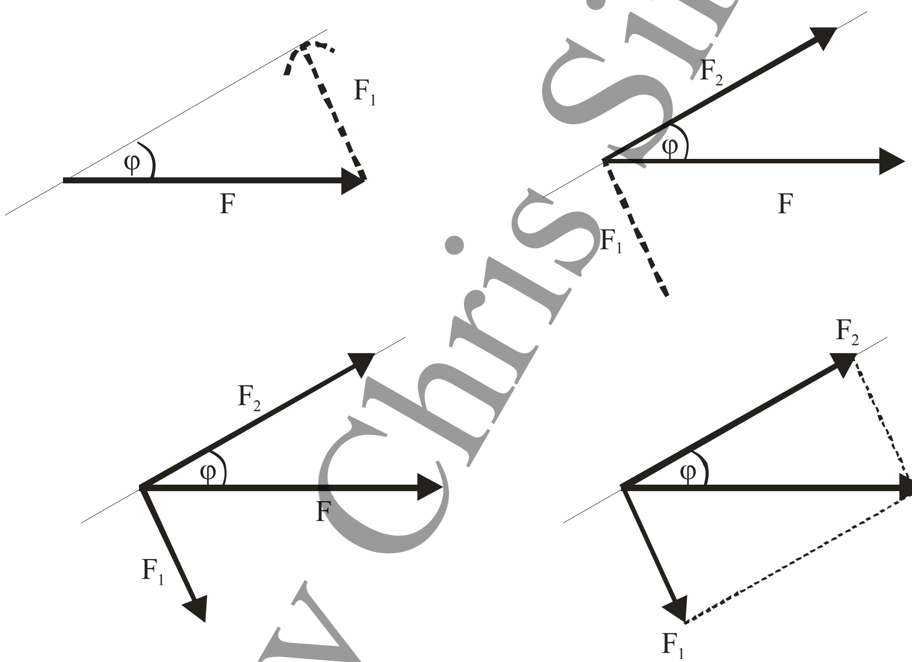
Να αναλύσετε μια δύναμη με μέτρο F=20 Nt σε δύο συνιστώσες F_1 *και* F_2 *έτσι ώστε η διεύθυνση της* F_2 *να σχηματίζει με την διεύθυνση της F γωνία φ=30° και η δύναμη* F_1 *να έχει μέτρο ίσο με* F_1*=10 Nt.*

ΛΥΣΗ

Η ανάλυση μιας δύναμης βασίζεται γενικά στη γεωμετρία. Για το λόγο αυτό ελάχιστα θα τη χρησιμοποιήσουμε στη φυσική. Γενικά βασιζόμαστε στη κατασκευή τριγώνων.

Σχεδιάζουμε πρώτα τη δύναμη F. Στη συνέχεια φέρνουμε μια ημιευθεία που σχηματίζει με την δύναμη F γωνία 30^0. Στη συνέχεια με τη χρήση του διαβήτη και με άνοιγμα ίσο με 10 Nt φέρνω την δύναμη F_1 ως εξής. Τοποθετώ την ακίδα του διαβήτη στο τέλος της δύναμης F και χαράσσω το σημείο που τέμνει την ημιευθεία. Το τμήμα της ημιευθείας από την αρχή της δύναμης F μέχρι το σημείο τομής που βρήκαμε δηλώνει την δύναμη F_2. Τέλος μεταφέρω τη δύναμη F_1 στο σημείο εφαρμογής της δύναμης F και σχηματίζω το παραλληλόγραμμο.

Τα μέτρα των άγνωστων δυνάμεων και των διευθύνσεων τους τα υπολογίζουμε από τις σχέσεις της μεθόδου του παραλληλογράμμου.



$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2.F_1.F_2.\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow 20=\sqrt{10^2+F_2^2+2.10.F_2.\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20^2=(\sqrt{10^2+F_2^2+2.10.F_2.\sigma\upsilon\nu\theta})^2\Rightarrow 400=100+F_2^2+2.10.F_2.\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400-100=F_2^2+20.F_2.\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow F_2^2+20.F_2.\sigma\upsilon\nu\theta=300\ \ (1)$$

$$\frac{F_1}{\eta\mu\varphi}=\frac{F}{\eta\mu\theta}\Rightarrow\frac{F_1}{\eta\mu 30}=\frac{F}{\eta\mu\theta}\Rightarrow\frac{10}{0,5}=\frac{20}{\eta\mu\theta}\Rightarrow 20=\frac{20}{\eta\mu\theta}\Rightarrow\eta\mu\theta=1\Rightarrow\theta=90^0$$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται

$$(1)\Rightarrow F_2^2+20.F_2.\sigma\upsilon\nu 90=300\Rightarrow F_2^2+20.F_2.0=300\Rightarrow F_2^2=300\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{F_2^2}=\sqrt{300}\Rightarrow F_2=10\sqrt{3}\ \ Nt$$