ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΕΡΙΩΝ

Η εξίσωση που συνδέει την πίεση, τον όγκο και την θερμοκρασία ενός ιδανικού αερίου που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται καταστατική εξίσωση αερίου και δίνεται όπως γνωρίζουμε από την σχέση

$$P.V = n.R.T \quad (15)$$

όπου η ο αριθμός γραμμομορίων και R η σταθερά των αερίων. Η σχέση αυτή μπορεί ακόμη να πάρει τις μορφές.

α) $P.V = N.K.T$ *όπου N ο αριθμός των μορίων και K η σταθερά του Boltzman.*

β) $P.V = \frac{m}{M_{mol}}.R.T$ *όπου m η μάζα του αερίου και* M_{mol} *η γραμμομοριακή μάζα.*

γ) $P.V = \frac{N}{N_A}.R.T$ *όπου* N_A *ο αριθμός του Avogadro. Η σχέση αυτή ανάγεται στην πρώτη σχέση.*

δ) $P = \frac{d}{M_{mol}}.R.T$ *όπου d η πυκνότητα του αερίου στην θερμοκρασία T°K.*

Ας δούμε τώρα μερικές βασικές προτάσεις για τις οποίες πρέπει να εφαρμόζεται η καταστατική εξίσωση.

Η καταστατική εξίσωση εφαρμόζεται με την σχέση (15) ή την μορφή

$$\frac{P_1.V_1}{T_1} = \frac{P_2.V_2}{T_2} \quad (17)$$

όταν η μάζα παραμένει σταθερή. Εδώ μπορεί να εφαρμοσθεί και η σχέση Poisson εφόσον όμως έχω αδιαβατική μεταβολή.

Όταν μεταβάλλεται η μάζα του αερίου που ακολουθεί την μεταβολή η καταστατική εξίσωση θα γράφεται πάντα με την σχέση 15β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΟΧΕΙΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ

Όταν αναμιγνύονται δύο η περισσότερα αέρια της ίδιας ή διαφορετικής θερμοκρασίας που δεν αντιδρούν χημικά μεταξύ τους τότε χρησιμοποιούμε την σχέση.

$$n_{ολ} = n_1 + n_2 + ... + n_ν$$

και την καταστατική εξίσωση τόσες φοράς όσες είναι τα αέρια. Για παράδειγμα έστω ότι αναμιγνύονται δύο αέρια με στοιχεία $n_1,P_1,V_1,T_1,$ *και* n_2,P_2,V_2,T_2 *οπότε προκύπτει ένα αέριο η,P,V,T θα έχω*

$$n = n_1 + n_2 \quad (18)$$

$$P_1.V_1 = n_1.R.T_1 \Rightarrow n_1 = \frac{P_1.V_1}{R.T_1}, \quad P_2.V_2 = n_2.R.T_2 \Rightarrow n_2 = \frac{P_2.V_2}{R.T_2} \text{ και}$$

$$P.V = n.R.T \Rightarrow n = \frac{P.V}{R.T}$$

οπότε η (18) γράφεται

$$(18) \Rightarrow \frac{P.V}{R.T} = \frac{P_1.V_1}{R.T_1} + \frac{P_2.V_2}{R.T_2} \Rightarrow P.V = \frac{T.P_1.V_1}{T_1} + \frac{T.P_2.V_2}{T_2}$$

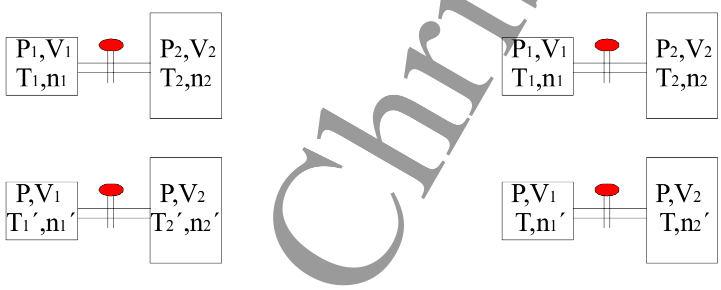
Όμοια κατά την διαρροή μιας ποσότητας αερίου από δοχείου εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση τρεις φορές μία για την αρχική ποσότητα που είχε το δοχείο, μία για την τελική μετά την διαρροή και μία για την μάζα που διαφεύγει.

Όταν δυο ή περισσότερα δοχεία συνδεθούν με σωλήνα που έχει στρόφιγγα και ανοίξω την στρόφιγγα τότε τα αέρια των δοχείων θα καλύψουν τον χώρο και των δύο δοχείων (τα αέρια φυσικά δεν πρέπει να αντιδρούν μεταξύ τους). Εδώ θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι

*I) Τα αέρια τελικά θα αποκτήσουν **κοινή πίεση** και **κοινή θερμοκρασία** εφόσον αρχικά έχουν διαφορετική θερμοκρασία, μεταξύ τους.*

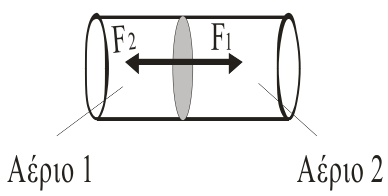
*II) Τα αέρια τελικά θα αποκτήσουν **κοινή πίεση** αλλά θα έχουν **διαφορετικές θερμοκρασίες** οι οποίες μπορεί να είναι οι ίδιες οι αρχικές ή και διαφορετικές.*

Παρατηρούμε επομένως, ότι τελικά η πίεση θα είναι κοινή και για τα δύο αέρια, την θερμοκρασία όμως θα την καθορίζει η άσκηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΟΧΕΙΑ ΜΕ ΥΔΡΑΡΓΥΡΟ.

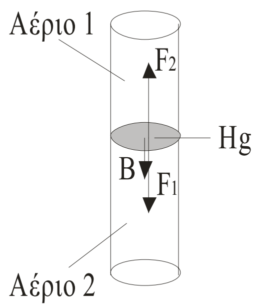
Όταν ο σωλήνας είναι τοποθετημένος οριζόντια και περιέχει δύο αέρια, τα οποία χωρίζονται με ποσότητα Hg και ισορροπεί δεν λαμβάνεται υπόψη το βάρος του Hg και έχω $P_1 = P_2$. *Αντίθετα σε κάθε τυχαία θέση ή θέση μη ισορροπίας θα έχω*



$$\Sigma F_x \neq 0 \Rightarrow \Sigma F_x = F_1 - F_2 \Rightarrow \Sigma F_x = P_1.s - P_2.s \Rightarrow \Sigma F_x = (P_1 - P_2).s$$

με $P_1 > P_2$

Όταν ο σωλήνας είναι τοποθετημένος κατακόρυφα και περιέχει δύο αέρια, τα οποία χωρίζονται με ποσότητα Hg. Εφόσον η ποσότητα Hg ισορροπεί θα έχουμε



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + B_{Hg} - F_2 = 0 \Rightarrow P_1.s + B_{Hg} = P_2.s$$

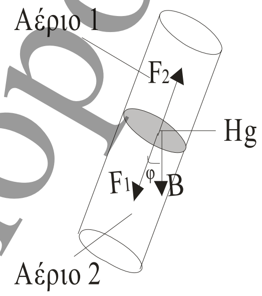
όπου s το εμβαδόν διατομής του σωλήνα, και B_{Hg} το βάρος του Hg.

Αντίθετα σε κάθε τυχαία θέση ή θέση μη ισορροπίας θα έχω

$$\Sigma F_y \neq 0 \Rightarrow \Sigma F_y = F_1 + B_{Hg} - F_2 \Rightarrow \Sigma F_y = P_1.s + B_{Hg} - P_2.s$$

με $P_1+B_{Hg} > P_2$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εργαζόμαστε όταν ο σωλήνας είναι τοποθετημένος πλάγια και η ποσότητα τον Hg ισορροπεί. Εδώ δεν λαμβάνεται υπόψη η συνιστώσα του B_{Hg} που είναι κάθετη στο σωλήνα αφού το βάρος αναλύεται κατά τα γνωστά. Κατά την ισορροπία στον άξονα x΄x θα έχω



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 + B_{xHg} - F_1 = 0 \Rightarrow P_2.s + B_{Hg}.\sigma\upsilon\nu\varphi = P_1.s$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει η κατακόρυφη με τον άξονα του σωλήνα που περνά από τα κέντρα των δύο απέναντι βάσεων.

Αντίθετα σε κάθε τυχαία θέση ή θέση μη ισορροπίας θα έχω

$$\Sigma F_y \neq 0 \Rightarrow \Sigma F_y = F_1 + B_{xHg} - F_2 \Rightarrow \Sigma F_y = P_1.s + B_{Hg}.\sigma\upsilon\nu\varphi - P_2.s$$

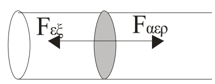
με $P_1+B_{xHg} > P_2$

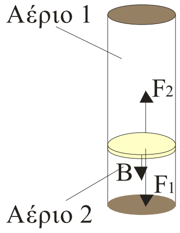
Τέλος η πίεση κάθε κατακόρυφης στήλης Hg είναι ίση με το ύψος της στήλης μετρημένη σε cm Hg δηλ. αν η στήλη του Hg έχει ύψος 2cm, ή πίεση που θα ασκεί θα είναι P=2 cm Hg.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΟΧΕΙΑ ΜΕ ΕΜΒΟΛΑ</u>

Οι πιο πάνω περιπτώσεις ισχύουν και όταν αντικαταστήσουμε τον Hg με έμβολο ο οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και κλείνει αεροστεγώς τις δύο ποσότητες των αερίων. Ακόμη δεν έχει σχέση στο πρόβλημα αν τα αέρια είναι ίδια ή διαφορετικά.

Όπως εργαζόμαστε με τον Hg, εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο και με τα έμβολα των δοχείων. Έτσι όταν ένα δοχείο χωρίζεται σε δύο μέρη με έμβολο, ο οποίο μετακινείται χωρίς τριβές, και το έμβολο ισορροπεί τότε δέχεται ίσες πιέσεις και από τους δύο χώρους του δοχείου. Αν το έμβολο κινείται κατακόρυφα τότε λαμβάνεται υπόψη και το βάρος του στις διάφορες δυνάμεις που θα ασκούνται σ' αυτό από τα αέρια.





Όταν το δοχείο κλείνεται με έμβολο θα πρέπει να προσδιορίσουμε το είδος της μεταβολής (ισόχωρη, ισόθερμη κ.λ.π.) που ακολουθεί για να εφαρμόσουμε κατάλληλη την καταστατική εξίσωση. Έτσι:

I. ***<u>Όταν το έμβολο δεν μετακινείται</u> ο όγκος του δοχείου παραμένει σταθερός. Έτσι έχουμε ισόχωρη μεταβολή (το αέριο μπορεί να ψύχεται ή να θερμαίνεται μέσω των τοιχωμάτων του δοχείου).***

II. Όταν το αέριο μεταβάλλεται έτσι ώστε <u>η πίεσή του να είναι συνεχώς ίση με την ατμοσφαιρική πίεση</u> η μεταβολή είναι ισοβαρή. Αυτή η μεταβολή συμβαίνει όταν το έμβολο μετακινείται πολύ αργά με σταθερή ταχύτητα και χωρίς τριβές.

III. Όταν το αέριο βρίσκεται σε δοχείο με αγώγιμα τοιχώματα το οποίο είναι τοποθετημένο <u>σε λουτρό σταθερής θερμοκρασίας</u> και μεγάλης θερμοχωρητικότητας η μεταβολή είναι ισόθερμη.

IV. Όταν το αέριο βρίσκεται <u>σε θερμικά μονωμένο δοχείο</u> τότε η μεταβολή είναι αδιαβατική. Αδιαβατική θεωρείται και κάθε μεταβολή απότομη διότι λόγω της ταχύτητας το αέριο δεν προλαβαίνει να ανταλλάξει θερμότητα με το περιβάλλον.

V. Τέλος όταν το αέριο παθαίνει μια μεταβολή που δεν ανταποκρίνεται στα πιο πάνω η μεταβολή είναι τυχαία. Τότε καθορίζουμε τις σχέσεις μεταξύ των θερμοδυναμικών μεταβλητών για την λύση της άσκησης από τα δεδομένα που μας δίνονται.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u>

<u>Η καταστατική εξίσωση χρησιμοποιείται για μία θέση ενώ οι τρεις νόμοι χρησιμοποιούνται για διαδρομή.</u>

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο</u>

Δυο δοχεία με ίσους όγκους συνδέονται με λεπτό σωλήνα αμελητέου όγκου και περιέχουν αέριο σε θερμοκρασία T=200K. Θερμαίνουμε το ένα δοχείο σε θερμοκρασία T_1=300K και ψύχουμε το άλλο σε θερμοκρασία T_2=100 K. Να υπολογίσετε τη τελική πίεση αν αρχικά κάθε δοχείο είχε την ίδια πίεση ίση με P=2 Atm.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Από την καταστατική εξίσωση για κάθε αέριο έχουμε

α) Στην αρχική κατάσταση

$$P.V = n_1.R.T \Rightarrow n_1 = \frac{P.V}{R.T},\quad P.V = n_2.R.T \Rightarrow n_2 = \frac{P.V}{R.T},$$

β) Στην τελική κατάσταση

$$P'.V = n_1'.R.T_1 \Rightarrow n_1' = \frac{P'.V}{R.T_1},\quad P'.V = n_2'.R.T_1 \Rightarrow n_2' = \frac{P'.V}{R.T_2},$$

Σύμφωνα με τη θεωρία έχουμε ότι $n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$ *οπότε η σχέση γράφεται*

$$n_1 + n_2 = n_1' + n_2' \Rightarrow \frac{P.V}{R.T} + \frac{P.V}{R.T} = \frac{P'.V}{R.T_1} + \frac{P'.V}{R.T_2} \Rightarrow \frac{2P}{T} = \frac{P'}{T_1} + \frac{P'}{T_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.2}{200} = P'(\frac{1}{100} + \frac{1}{300}) \Rightarrow P' = 1{,}5 \quad Atm$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2º

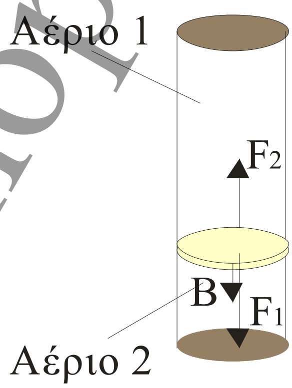
Σε κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο κινείται χωρίς τριβές ένα έμβολο με βάρος B=2 Nt και εμβαδό διατομής $s=10^{-4}$ m^2. Στα δύο διαμερίσματα βρίσκονται ίσες μάζες του ίδιου αερίου. Στη θερμοκρασία T_1=300 K το έμβολο ισορροπεί σε θέση τέτοια ώστε ο όγκος του πάνω διαμερίσματος να είναι τριπλάσιος από τον όγκο του κάτω δηλαδή $V_1=3V_2$. Να υπολογίσετε

α) την σχέση μεταξύ των όγκων των δύο διαμερισμάτων αν η θερμοκρασία γίνει ίση με T_2=400 K και

β) την αρχική πίεση του αερίου σε κάθε διαμέρισμα. Δίνεται 1 Atm=10^5 Nt/m^2.

ΛΥΣΗ

Εφόσον το έμβολο ισορροπεί θα έχουμε



Φαινόμενο: Ισορροπία εμβόλου στην αρχική θέση

Εφαρμόζουμε: Συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + B - F_2 = 0 \Rightarrow P_1.s + B = P_2.s \quad (1)$$

όπου s το εμβαδόν διατομής του σωλήνα, και B_{Hg} το βάρος του Hg.

Η μεταβολή είναι ισοβαρής διότι στο έμβολο ενεργούν οι ίδιες δυνάμεις και ισορροπεί σε διαφορετικές θέσεις.

Από την καταστατική εξίσωση για κάθε αέριο έχουμε

α) Στην αρχική κατάσταση

$$P_1.V_1 = n_1.R.T_1 \Rightarrow n_1 = \frac{P_1.V_1}{R.T_1} \quad , \; P_2.V_2 = n_2.R.T_1 \Rightarrow n_2 = \frac{P_2.V_2}{R.T_1}$$

β) Στην τελική κατάσταση

$$P_1.V_1' = n_1'.R.T_2 \Rightarrow n_1' = \frac{P_1.V_1'}{R.T_1} \quad , \; P_2.V_2' = n_2'.R.T_1 \Rightarrow n_2' = \frac{P_2.V_2'}{R.T_1}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία έχουμε ότι $n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$ οπότε η σχέση γράφεται

$$n_1 + n_2 = n_1' + n_2' \Rightarrow \frac{P_1.V_1}{R.T_1} + \frac{P_2.V_2}{R.T_1} = \frac{P_1.V_1'}{R.T_2} + \frac{P_2.V_2'}{R.T_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1.3V_2}{T_1} + \frac{P_2.V_2}{T_1} = \frac{P_1.V_1'}{T_2} + \frac{P_2.V_2'}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1.3V_2 + P_2.V_2}{T_1} = \frac{P_1.V_1' + P_2.V_2'}{T_2} \quad (2)$$

Επειδή τα αέρια έχουν ίσες μάζες θα είναι

$$n_1 = n_2 \Rightarrow \frac{P_1.V_1}{R.T_1} = \frac{P_2.V_2}{R.T_1} \Rightarrow P_1.3V_2 = P_2.V_2 \Rightarrow P_2 = 3P_1 \quad (3)$$

Οπότε η σχέση (2) γράφεται

$$(2) \xrightarrow{(3)} \frac{P_1.3V_2 + 3P_1.V_2}{T_1} = \frac{P_1.V_1' + 3P_1.V_2'}{T_2} \Rightarrow \frac{6V_2}{T_1} = \frac{V_1' + 3V_2'}{T_2} \quad (4)$$

Ακόμη για τους όγκους των δύο διαμερισμάτων του δοχείου στην αρχική κατάσταση ισχύει

$$V_1 + V_2 = V \Rightarrow 3V_2 + V_2 = V \Rightarrow 4V_2 = V \Rightarrow V_2 = \frac{V}{4}$$

Οπότε η (4) γίνεται

$$(4) \Rightarrow \frac{6V}{4T_1} = \frac{V_1' + 3V_2'}{T_2} \Rightarrow \frac{6V}{4.300} = \frac{V_1' + 3V_2'}{400} \Rightarrow V_1' + 3V_2' = 2V \quad (5)$$

Ακόμη έχουμε

$$V_1' + V_2' = V \quad (6)$$

Λύνοντας το σύστημα των (5) και (6) έχουμε

$$\begin{matrix} V_1' + 3V_2' = 2V \\ V_1' + V_2' = V \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} V_1' + 3V_2' = 2V \\ V_1' = V - V_2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} V - V_2' + 3V_2' = 2V \\ .... \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2V_2' = V \\ .... \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} V_2' = \dfrac{V}{2} \\ V_1' = \dfrac{V}{2} \end{matrix}$$

Επομένως τα διαμερίσματα μετά την αύξηση της θερμοκρασίας αποκτούν ίσους όγκους.

β) Η σχέση (1) σε συνάρτηση με την (3) γράφεται

$$P_1.s + B = 3P_1.s \Rightarrow 2P_1.s = B \Rightarrow P_1 = \frac{B}{2.s} = \frac{2}{2.10^{-4}} \Rightarrow P_1 = 0,1 \ \ Atm$$

$$Και \ (3) \Rightarrow P_2 = 0,3 \ \ Atm$$