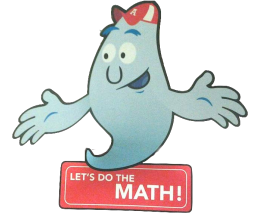




## Ασκήσεις στις απόλυτες τιμές



1. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = |x^2 + 5| + |-x^2 + 6x - 9|$
2. Αν  $-1 < x < 2$ , να απλοποιήσετε την παράσταση  
 $A = |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |x - 3|$
3. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{x^2}{|x|}$
4. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{|\alpha - 1|}{|1 - \alpha|} - \frac{|-\beta - 1|}{|\beta + 1|} + \frac{|\alpha - \beta + \gamma|}{|\beta - \alpha - \gamma|}$
5. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = 2|x - 3| - 4$
6. Αν  $\alpha < \beta < \gamma$  να απλοποιηθεί η παράσταση  
 $A = 2|\alpha - \beta| - 3|\gamma - \beta| - 5|\alpha - \gamma| + |2\alpha - \beta - \gamma|$
7. Αν  $x \in (-1, 2)$  να απλοποιηθεί η παράσταση  
 $A = |x + 1| + |x - 2| + |3 - x|$
8. Αν  $|x| < \alpha$  και  $\alpha > 0$  να δειχθεί ότι η παράσταση  $A = ||x - \alpha| + |x + \alpha||$  είναι ανεξάρτητη του  $x$
9. Αν  $x \in (-a, a)$  να εξεταστεί αν  $A = |2x - |x + \alpha|| + |2x + |x - \alpha||$  είναι ανεξάρτητη του  $x$
10. Αν  $x \notin [-a, a]$  να απλοποιηθεί η παράσταση  $A = 2|x - \alpha| - 3|x + \alpha|$
11. Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση  
 $A = 3 + 2|x - 1| - 2(x - 2) + |x|$
12. Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\alpha^2 \neq \beta^2$  δείξτε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 > \left| \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} \right| - \left| \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \right|$
13. Αν  $1 < x < 5$  να απλοποιηθούν οι παραστάσεις  
i)  $A = \frac{|x - 1| - x}{|x + 1| + |5 - x|}$       ii)  $B = \frac{-x + |7 + x|}{13}$
14. Να γράψετε χωρίς απόλυτα τις παραστάσεις  
i)  $A = |4 - x| - |x + 4|$       ii)  $B = 3x - 2|3x - 1| + 2(x - 1) + |x + 2|$
15. Να λυθούν οι εξισώσεις

i)  $|2x-3|=5$

v)  $|x+1|=|7-2x|$

ii)  $|x+1|=-2$

vi)  $\frac{-3|2x+5|}{7}=0$

iii)  $|3x+2|=0$

vii)  $|2x|+1=0$

iv)  $2|2x+1|+3=0$

vii)  $\frac{5-|1-3x|}{6}=0$

16. Ομοια

i)  $|2x+3|-|3x+2|=0$

iii)  $3(|x|-2)-(5-|x|)=1$

ii)  $|x+1|=3|1-4x|$

iv)  $\frac{|x|-4}{5}=\frac{|x|-3}{2}+\frac{4|x|-1}{3}$

17. Ομοια

i)  $\frac{1-|x|}{2}-\frac{2|x|-5}{3}=\frac{10}{3}$

ii)  $\frac{3|x+2|}{4}+\frac{|2x+4|-1}{3}=|x+2|$

iii)  $|x-3|-|4x-12|=-6$

iv)  $4|x-2|-|3x-6|-|x-5|=0$

v)  $|3(1-x)|-5|x-2|=|x-1|-|x-2|$

18. Ομοια

i)  $|x+1|+|1-x^2|=0$

ii)  $\sqrt{x^2-1}+|x^2+x|+2(x+1)^4=0$

iii)  $|x-3|=2x-1$

iv)  $|6-|3x-1||=5$

v)  $2x+3|x|-10=0$

19. Ομοια

i)  $|2x-3|=-2x+3$

ii)  $|x^4-1|=x^4-1$

iii)  $|2x-3|=2x-3$

iv)  $|x+2|-2|x-1|=1$

v)  $2x^2-3|x|+1=0$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i)  $|x|-3=0$

ii)  $1-2|x|=0$

iii)  $3|x| + 1 = 0$

iv)  $2|x| - |-x| + |3x| - 5 = 0$

v)  $|2x - 3| - 1 = 0$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i)  $|3x - 1| = |x - 5|$

ii)  $|2x - 3| - 2|x| = 0$

22. Να λύσετε την εξίσωση :  $|x - 1| = 3x - 7$

23. Να λύσετε την εξίσωση :  $1 - \frac{|x| - 1}{6} = |x| - \frac{3|x| - 2}{3}$

24. Να λύσετε την εξίσωση :  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 1|$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i)  $||x - 1| + 1| = 3$

ii)  $||x - 2| - 1| = 1$

26. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $|x - 1| + 2 = \alpha$  , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

27. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i)  $|x| - \frac{2|x| - 3}{10} = 1 - \frac{|x| - 10}{5}$

ii)  $1 - \frac{|2x - 1| - 1}{4} = |1 - 2x| - \frac{|6x - 3| - 2}{8}$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

ii)  $\sqrt{25x^2 - 10x + 1} - |3x - 5| = 0$

29. Να λυθούν οι εξισώσεις

i)  $|3x - 10| - d(2x, -5) = 0$

ii)  $|5x - 20| - 3 = 3|4 - x| - 11$

30. Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $ x-1  < 2$	v) $ 3x-11  < -\frac{7}{3}$
ii) $ x-3  < 0$	vi) $ 2x+5  < 3$
iii) $ x-2  < -2$	vii) $ x+4  \geq 0$
iv) $ x-4  \leq 0$	viii) $ x+4  > 0$

31. Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $\left  \frac{x+1}{x+4} \right  > -2$	iii) $\left  \frac{2}{x-4} \right  \geq 1$
ii) $5 \cdot \frac{1+ x }{ x^2-2 } > -\frac{1}{3}$	iv) $\frac{1}{ x+2 } \leq 1$

32. Όμοια

i) $\left  \frac{4}{3x-2} \right  > \frac{1}{3}$	iii) $\frac{2 x -3}{4} < \frac{1+ x }{3}$
ii) $ x  < \left  \frac{x}{2} \right  + 1$	iv) $3( x -1) - 2(2- x ) > 2$

33. Όμοια

i) $\frac{ x-2 +3}{2} - \frac{2( 2-x +1)}{3} <  x-2  - 5$
ii) $ 2x-1  \geq 3x-2$
iii) $ 2-x  < x$
iv) $2 x+1  > 4+x$
v) $ 3x-2  > 2- 6x-4 $

34. Να βρεθούν τα  $x$  για τα οποία ισχύουν

i) $1 \leq  x  < 2$
ii) $3 \leq  x-2  \leq 5$

35. Όμοια

i) $  x -2  \leq 1$	iv) $-3 \leq  2+3x  \leq 0$
ii) $ 3- x   \geq 2$	v) $-3 \leq \left  \frac{x+4}{x-1} \right  < 0$
iii) $  x+1 -4  < 3$	vi) $0 <  x+1  < 1$

36. Όμοια

i)  $2|x| + 3|x-1| > 5x - 2$

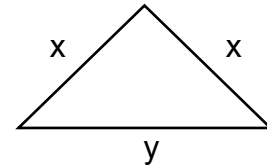
ii)  $\left| \frac{1-x}{x^2-x} \right| < 1$

iii)  $\left| \frac{x-4}{x^2-4x} \right| < \frac{1}{3}$

37. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x-2  \leq 3$	$d(x, 2) \leq 3$	$[-1, 5]$
$ x+2  < 4$		
	$d(x, 3) > 2$	
		$[-3, 1]$
		$(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$

38. Αν  $|x-3| < 0,2$  και  $|y-4| < 0,1$ , να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου του διπλανού σχήματος.



39. Αν  $|a|=1$ ,  $|\beta|=2$ ,  $|\gamma|=3$ , να δείξετε ότι  $|a+\beta-\gamma| < 7$ .

40. Αν  $|x| \leq 1$ , να δείξετε ότι  $|x^3 - 5x^2 + 3x - 1| \leq 10$

41. Αν ισχύει  $|x| \leq 1$  και  $|y| \leq 2$ , να αποδείξετε ότι:

A)  $|7x - 2y| \leq 11$       B)  $|1 - 3x + 4y| \leq 12$

42. i. Να δείξετε ότι  $|x-y| \leq |x-\omega| + |y-\omega|$

ii. Αν  $|x-2| \leq 1$  και  $|y-3| \leq 5$ , να δείξετε ότι  $|x-y+1| \leq 6$

43. Να δείξετε ότι :  $\left| \frac{x}{1-x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

44. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις

- i.  $|-3| = \dots\dots\dots$
- ii.  $|x^2+1| = \dots\dots\dots$
- iii.  $||x|| = \dots\dots\dots$
- iv. Αν  $x < 1$ , τότε  $|x-1| = \dots\dots\dots$
- v. Αν  $x \neq 1$ , τότε  $|x-1| \dots\dots\dots 0$
- vi. Το διάστημα  $(-3, 5]$  έχει μήκος  $\dots\dots\dots$ , κέντρο  $\dots\dots\dots$  και ακτίνα  $\rho = \dots\dots\dots$
- vii.  $|x| = 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- viii.  $|x-1| = 2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- ix.  $|x-1| < 2 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$
- x.  $|x+2| > 1 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$

45. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις

- i.  $|1/2|$ ,  $|-3|$ ,  $|3-\pi|$
- ii.  $|-a^2|$ ,  $|a^2+1|$ ,  $||a|+2|$

46. Αν  $-2 < a < 1$ , να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

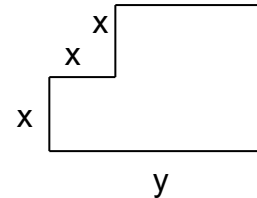
- i.  $A = |a+2| - |a - 1|$
- ii.  $B = |a+3| - |a - 2|$
- iii.  $\Gamma = |2a+5| - |3a-4|$

47. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{|2x-1|}{|1-2x|} - 3 \frac{|3y+2|}{|-2-3y|} + 2 \frac{|x-y+z|}{|y-x-z|}$

48. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x$ , για τους οποίους ισχύει:

- i.  $|x| = 3$
- ii.  $|x-a| = |2x+3a|$

49. Αν  $|x-1| < 0,1$  και  $|y-4| < 0,2$  να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου του διπλανού σχήματος.



50. Αν  $|x| = 2$ ,  $|y| = 3$  και  $|z| = 5$ , να δείξετε ότι  $|x - y + z| \leq 10$

51. Αν  $-1 \leq x \leq 1$ , να δείξετε ότι  $|x^3 - 3x^2 + 2x - 1| \leq 7$

52. Να δείξετε ότι:  $a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$

53. Να δείξετε ότι:  $\left| \frac{2a}{a^2 + 1} \right| \leq 1$

54. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- i)  $\frac{|x|+2}{|x|+1} < 2$
- ii)  $\left| \frac{x}{|x|+2} \right| < \frac{1}{2}$

55. Να λυθεί η ανίσωση:  $|2x-3| < |2x+1|$ .

56. Αν  $|a| \leq 2$  και  $|\beta| \leq 1$  να αποδείξετε ότι:

- i)  $3a-2\beta \leq 8$
- ii)  $2a-\beta+3 \leq 8$

57. Να δείξετε ότι:  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$ .

58. Αν  $|a+2\beta| < |\beta+2a|$  (1) να δείξετε ότι:  $|\beta| < |\alpha|$ .

59. Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$ .

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ .
- β) Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A$ .

γ) Να λυθεί η ανίσωση.

60. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i)  $|3d(x,0)-2|-x|=20$

ii)  $|x^3|-3x^2=0$

iii)  $|x|^3-3x^2+3|x|-1=0$

iv)  $|x-3|-(x-3)^2=0$

61. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i)  $\frac{2|x|-1}{|x|-x} = \frac{1}{2}$

ii)  $\frac{|x|-2}{|x|+x} = 2$

62. Να λυθεί η ανίσωση:  $|2x-1|-\left|\frac{1}{2}-x\right|>1$ .

63. Αν ισχύει  $|3\alpha+2| < |2\alpha+3|$  να δείξετε ότι  $\alpha^2 < 1$ .

64. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i)  $d(x,2)-|x-2|-4 > 1-|4-2x|$

ii)  $d(x,2)-\frac{|x-2|-4}{15} > 1-\frac{|4-2x|}{5}$

65. Να λυθούν :

i)  $|3x-6|=|3|x||$

ii)  $|x^2-5x+4|>0$