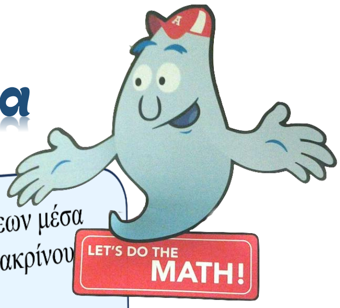
Απόλυτες τιμές-Μεθοδολογία



- Σκοπός μας είναι να βρούμε το **πρόσημο** των παραστάσεων μέσα **στα απόλυτα** ή αν δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε να διακρίνουμε περιπτώσεις.
- Αν έχουμε πληροφορίες σχετικά με το πρόσημο τις χρησιμοποιούμε και μετά βγάζουμε τα απόλυτα.

Παράδειγμα 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i)\ A=\left|x^2+2x+1\right| \quad ii)\ B=\left|-x^2+8x-16\right|$$

$$iii)\ \Gamma=\left|-x^2-2\right|-\left|x^2-4x+4\right|$$

<u>Λύση</u>

I) Παρατηρούμε ότι $x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$. Άρα η παράσταση Α γίνεται

$$A=\left|x^2+2x+1\right|=\underbrace{\left|(x+1)^2\right|}_{\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma}=(x+1)^2=x^2+2x+1$$

II) Παρατηρούμε ότι $-x^2+8x-16=-\left(x^2-8x+16\right)=-(x-4)^2\leq 0$. Άρα η παράσταση Β γίνεται

$$B=\left|-x^2+8x-16\right|=\underbrace{\left|-(x-4)^2\right|}_{\alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma}=(x-4)^2=x^2-8x+16$$

III) Παρατηρούμε ότι
$$-x^2-2=-\left(x^2+2\right)<0$$
$$x^2-4x+4=(x-4)^2\geq 0$$

Άρα η παράσταση Γ γίνεται

$$\Gamma=\left|-x^2-2\right|-\left|x^2-4x+4\right|=\underbrace{\left|-\left(x^2+2\right)\right|}_{\alpha\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma}-\underbrace{\left|(x-2)^2\right|}_{\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma}=x^2+2-(x-2)^2=$$

$$=x^2+2-\left(x^2-4x+4\right)=\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}+4x-4=4x-2$$

Παράδειγμα 2

- Αν $x > 3$, να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση
- Α = $|x-3|+|x+1|$.

Λύση

Έχουμε : $x > 3 \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow |x-3| = x-3$

$x > 3 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow |x+1| = x+1$

Άρα, η παράσταση γράφεται : Α = x – 3 + x + 1 = 2x – 2 .
Αν δεν γνωρίζουμε το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στις απόλυτες τιμές εργαζόμαστε ως εξής:
- Βρίσκουμε τις τιμές του x που μηδενίζουν τα απόλυτα.
- Φτιάχνουμε πίνακα με το πρόσημο των παραστάσεων που περιέχονται στα απόλυτα (όταν έχουμε περισσότερες από μία διαφορετικές παραστάσεις)
- Διακρίνουμε περιπτώσεις για το x.

Παράδειγμα 3

- Να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση

$A = 1 + x - |x-2|$.

Λύση

Έχουμε μόνο μία παράσταση της οποίας το πρόσημο μας ενδιαφέρει, άρα :
- το x – 2 μηδενίζεται για x = 2
- διακρίνουμε περιπτώσεις για το x.

$x < 2 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow |x-2| = -x+2$ και Α = 1 + x – (- x + 2) = 1 + x + x – 2 = 2x – 1 .

$x \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| = x-2$ και Α = 1 + x – (x – 2) = 1 + x – x + 2 = 3.

Παράδειγμα 4

- Να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση

$B = |4-x| - |x+4|$.

Λύση

Μηδενίζουμε πρώτα τις παραστάσεις μέσα στα απόλυτα

$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Επίσης ισχύουν για τα πρόσημα

$4 - x > 0 \Leftrightarrow 4 > x$

$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω Πίνακα

x	$-\infty$ -4	4	$+\infty$
$4-x$	+	+	–
$x+4$	–	+	+
$\lvert 4-x\rvert$	$4-x$	$4-x$	$-4+x$
$\lvert x+4\rvert$	$-x-4$	$x+4$	$x+4$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\boxed{x<-4}$, τότε η παράσταση γράφεται :
B = 4 – x – (- x – 4) = 4 – x + x + 4 = 8.

β) $\boxed{-4\leq x<4}$, τότε η παράσταση γράφεται :
B = 4 – x – (x + 4) = 4 – x – x – 4 = - 2x.

γ) $\boxed{x\geq 4}$, τότε η παράσταση γράφεται :
B = - 4 + x – (x + 4) = -4 + x – x – 4 = - 8.

Παράδειγμα 5

Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A=\left|a-|a|\right|-\left||a|+a\right|$$

Λύση

Εδώ θυμόμαστε την ιδιότητα απολύτων →

$$|a|\geq a$$
$$|a|\geq -a$$

Άρα

$|a|\geq a \Rightarrow 0\geq a-|a| \Rightarrow a-|a|\leq 0$

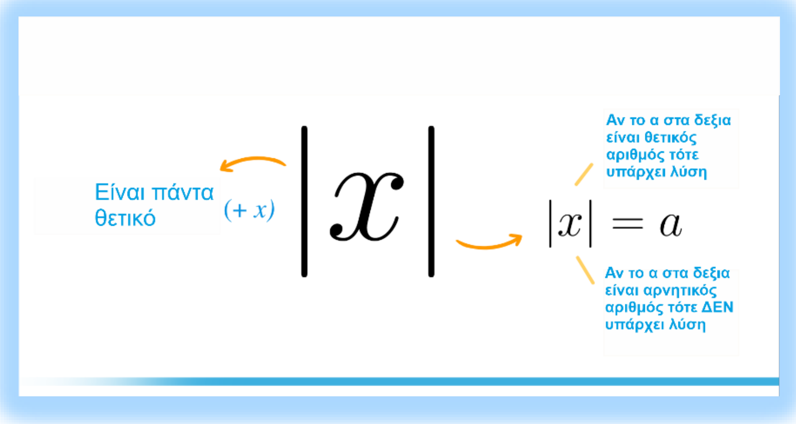
$|a|\geq -a \Rightarrow |a|+a\geq 0$

Συνεπώς η παράσταση A γίνεται

$$A=\underbrace{\left|a-|a|\right|}_{\text{αρνητικός αριθμός}}-\underbrace{\left||a|+a\right|}_{\text{θετικός αριθμός}}=-\left(a-|a|\right)-\left(|a|+a\right)=$$

$$=-a+\cancel{|a|}-\cancel{|a|}-a=-2a$$

ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ



Παράδειγμα 6

Να λυθούν οι εξισώσεις :
$$|2x+1| = 9$$
$$5|x+3|+2=0$$
$$|x-5|=0$$

<u>Λύση</u>

α) $|2x+1| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=9 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4 \\ \text{ή} \\ 2x+1=-9 \Leftrightarrow 2x=-10 \Leftrightarrow x=-5 \end{cases}$

β) $5|x+3|+2=0 \Leftrightarrow 5|x+3|=-2 \Leftrightarrow |x+3|=-\dfrac{2}{5}$: αδύνατη.

γ) $|x-5|=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ισχύει η ισοδυναμία $|A|=|B| \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ \text{ή} \\ A=-B \end{cases}$

Παράδειγμα 7

Να λυθεί η εξίσωση: $|x+1|=|7-2x|$.

Λύση

Ισχύει : $x+1=7-2x \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$

ή

$x+1=-(7-2x) \Leftrightarrow x+1=-7+2x \Leftrightarrow x=8$.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα απόλυτο ίσο με μια παράσταση του x , της οποίας δεν γνωρίζουμε το πρόσημο, διακρίνουμε περιπτώσεις για την παράσταση μέσα στο απόλυτο.

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η εξίσωση: $|x-5|=1-2x$.

Λύση

Διακρίνουμε περιπτώσεις. Έχουμε: $x – 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

$x \geq 5 \Leftrightarrow x – 5 \geq 0 \Leftrightarrow |x-5|=x-5$, άρα η εξίσωση γίνεται:

$x – 5 = 1 – 2x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$ απορρίπτεται αφού $x \geq 5$.

$x < 5 \Leftrightarrow x – 5 < 0 \Leftrightarrow |x-5|=-x+5$, άρα η εξίσωση γίνεται :

$– x + 5 = 1 – 2x \Leftrightarrow 2x – x = 1 – 5 \Leftrightarrow x = -4$ δεκτή. Αρα λύση της εξίσωσης η $x=-4$.

Σε μια εξίσωση όπου εμφανίζονται απόλυτα της ίδιας παράστασης του x (ή μετατρέπονται εύκολα σε ίδια) κάνουμε πράξεις μέχρι η συγκεκριμένη απόλυτη τιμή να εμφανίζεται μόνο μια φορά στην εξίσωση και μετά την λύνουμε.

Παράδειγμα 9

Να λυθούν οι εξισώσεις:

Λύση

α) $\frac{3|2x-5|+1}{2}-|2x-5|=1$ (πολ/ζουμε με 2 για να φύγει ο παρονομαστής)

$$\Leftrightarrow 3|2x-5|+1-2|2x-5|=2 \Leftrightarrow |2x-5|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=1 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3 \\ \text{ή} \\ 2x-5=-1 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$$

β) $|2-x|+3|2x-4|+3=0$

Παρατηρούμε ότι : $|2-x|=|-(x-2)|=|x-2|$

$$|2x-4|=|2(x-2)|=|2||x-2|=2|x-2|$$

Άρα η εξίσωση γίνεται : $|x-2|+3\cdot 2|x-2|+3=0 \Leftrightarrow 7|x-2|=-3 \Leftrightarrow |x-2|=-\frac{3}{7}$

: αδύνατη.

Σε μια εξίσωση που εμφανίζονται απόλυτα διαφορετικών παραστάσεων του x βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της κάθε παράστασης και διακρίνουμε περιπτώσεις για το x.

Παράδειγμα 10

Να λυθεί η εξίσωση : $3|4-x|-|2x+1|-x=1$.

<u>Λύση</u>

Μηδενίζουμε τα απόλυτα

- $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Παρατηρούμε για τα πρόσημα

$4-x>0 \Leftrightarrow x<4$

$2x+1>0 \Leftrightarrow 2x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$4-x$	+	+	-
$2x+1$	–	+	+
$\|4-x\|$	$4-x$	$4-x$	$-4+x$
$\|2x+1\|$	$2x+1$	$2x+1$	$-2x-1$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

$\boxed{x \le -\frac{1}{2}}$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$3(4-x)-(-2x-1)-x=1 \Leftrightarrow 12-3x+2x+1-x=1 \Leftrightarrow -2x=-12 \Leftrightarrow x=6$

Η τιμή $x = 6$ απορρίπτεται , αφού $x \le -\frac{1}{2}$.

$\boxed{-\frac{1}{2} < x \leq 4}$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$3(4-x)-(2x+1)-x=1 \Leftrightarrow 12-3x-2x-1-x=1 \Leftrightarrow -6x=-10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{6} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$: δεκτή.

$\boxed{x>4}$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$3(-4+x)-(2x+1)-x=1 \Leftrightarrow -12+3x-2x-x=1 \Leftrightarrow 0x=14$: αδύνατη.

Άρα, τελικά η λύση της εξίσωσης είναι : $x=\frac{5}{3}$.

Ισχύει η ισοδυναμία
$|A|+|B|=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ και } B=0$

Παράδειγμα 11

Να λυθεί η εξίσωση: $|x^2-1|+|x-1|=0$.

<u>Λύση</u>

Πρέπει : $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$ και $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Άρα, η λύση της εξίσωσης είναι η x = 1.

ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Η ανίσωση $|x|<\theta$ δίνει $\begin{cases} \text{αν } \theta>0 \Leftrightarrow -\theta<x<\theta \\ \text{αν } \theta \leq 0: \text{αδυνατη} \end{cases}$

Παράδειγμα 12

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|2x+1|<3 \Leftrightarrow -3<2x+1<3 \Leftrightarrow -4<2x<2 \Leftrightarrow -2<x<1$.

β) $|2x-1|<-\frac{5}{8}$: αδύνατη .

γ) $|3+5x| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |3+5x|<0: \text{αδυνατη} \\ \text{ή} \\ |3+5x|=0 \Leftrightarrow 3+5x=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5} \end{cases}$

Η ανίσωση $|x|>\theta$ δίνει $\begin{cases} \text{αν } \theta>0 \Leftrightarrow x<-\theta \text{ η } x>\theta \\ \text{αν } \theta<0 \text{ αληθευει για καθε } x \\ \text{αν } \theta=0 \text{ αληθευει για καθε } x\neq 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 13

Να λυθούν οι ανισώσεις :

α) $|x-7|>5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7<-5 \Leftrightarrow x<2 \\ \text{ή} \\ x-7>5 \Leftrightarrow x>12 \end{cases}$

β) $|4x+2|>-5$: αληθεύει για κάθε x.

γ) $|x-3|>0$: αληθεύει για κάθε $x\neq 3$ $(x-3=0 \Leftrightarrow x=3)$.

Αν $\theta>0$ ισχύουν οι ισοδυναμίες : $\begin{array}{l} |x|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta \\ |x|\geq\theta \Leftrightarrow x\leq-\theta \text{ ή } x\geq\theta \end{array}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! στις εξισώσεις ή ανισώσεις που έχουν παραστάσεις του x στον παρονομαστή : Δεν ξεχνάμε να πάρουμε τους κατάλληλους περιορισμούς.

Παράδειγμα 14

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$\left|\frac{4\alpha}{4\alpha^2+1}\right|\leq 1$$

<u>Λύση</u>.

Προσπαθούμε να καταλήξουμε σε σχέση που ισχύει

$$\left|\frac{4\alpha}{4\alpha^2+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{|4\alpha|}{|4\alpha^2+1|} \le 1 \Leftrightarrow |4\alpha| \le |4\alpha^2+1| \Leftrightarrow 4|\alpha| \le 4\alpha^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|\alpha| \le 4|\alpha|^2+1 \Leftrightarrow 4|\alpha|^2+1-4|\alpha| \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(4|\alpha|-1\right)^2 \ge 0$$

που ισχύει.

Παράδειγμα 15

Να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha\beta| - \alpha\beta \ge \alpha|\beta| - \beta|\alpha|$$

Λύση.

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και έχουμε :

$$|\alpha\beta| - \alpha\beta \ge \alpha|\beta| - \beta|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha\beta| - \alpha\beta - \alpha|\beta| + \beta|\alpha| \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha||\beta| - \alpha\beta - \alpha|\beta| + \beta|\alpha| \ge 0 \Leftrightarrow \left(|\alpha||\beta| - \alpha|\beta|\right) + \left(\beta|\alpha| - \alpha\beta\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta|\left(|\alpha| - \alpha\right) + \beta\left(|\alpha| - \alpha\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(|\alpha| - \alpha\right)\left(|\beta| + \beta\right) \ge 0$$

που ισχύει, γιατί για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει :

$$|x| \ge x$$
$$|x| \ge -x$$

Παράδειγμα 16

Αν ισχύει $|\alpha - 2\beta| < |2\alpha - \beta|$, να αποδείξετε ότι $|\beta| < |\alpha|$

Λύση.

Γνωρίζουμε ότι αν $x, y \ge 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$x^\nu \le y^\nu \Leftrightarrow x \le y$$

με ν θετικό ακέραιο αριθμό

- Αν δεν γνωρίζουμε τα πρόσημα των x, y τότε έχουμε:
  $x^2 \le y^2 \Leftrightarrow |x|^2 \le |y|^2 \Leftrightarrow |x| \le |y|$, διότι τώρα $|x|, |y| \ge 0$
- **Γενικότερα** μπορούμε να γράψουμε :
  $x^{2\nu} \le y^{2\nu} \Leftrightarrow |x|^{2\nu} \le |y|^{2\nu} \Leftrightarrow |x| \le |y|$

Παρατηρούμε λοιπόν :

$$|\alpha-2\beta|<|\beta-2\alpha| \Leftrightarrow |\alpha-2\beta|^2<|\beta-2\alpha|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2\beta)^2<(\beta-2\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\cancel{4\alpha\beta}+4\beta^2<\beta^2-\cancel{4\alpha\beta}+4\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^2<3\beta^2 \Leftrightarrow |\alpha|^2<|\beta|^2 \Leftrightarrow |\alpha|<|\beta|$$

που ισχύει, ως δεδομένο.

Παράδειγμα 17

Το διάστημα [-4,β] έχει κέντρο τον αριθμό 3. Να βρείτε:

A) τον αριθμό β,

B) το μήκος και την ακτίνα του διαστήματος.

Λύση

A) Έχουμε $\dfrac{-4+\beta}{2}=3 \Leftrightarrow -4+\beta=6 \Leftrightarrow \beta=10$

B) Το διάστημα [-4,10] έχει:

- Μήκος ίσο με 10-(-4)=14
- Ακτίνα ίση με $\dfrac{10-(-4)}{2}=\dfrac{14}{2}=7$