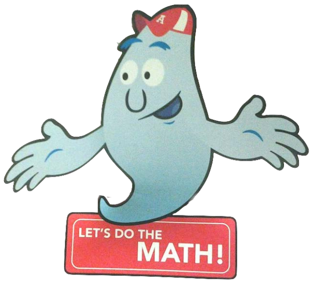


# Ασκήσεις

1. Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=3\cdot 2^\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τους $\alpha_1$ και $\lambda$.

2. Αν η ακολουθία $(\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος και ισχύει :
$$\alpha^2_{\nu+1}=2\alpha_{\nu+1},\ \nu\in N^*$$
να βρείτε τον λ.

3. Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο πρώτος όρος είναι -12 και ο πέμπτος $-\frac{4}{27}$.

4. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 7 και ο όγδοος όρος $-\frac{7}{32}$ να βρείτε :
   i. την γεωμετρική πρόοδο
   ii. το πλήθος των όρων της γεωμετρικής προόδου μέχρι και τον όρο που ισούται με $-\frac{7}{512}$.

5. Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 3, 9, 27, .... που υπερβαίνει το 2004.

6. Να βρείτε τον όρο της γεωμετρικής προόδου :512, 256, 128, ... που είναι μικρότερος του $\frac{1}{2}$.

7. Να δείξετε ότι οι αριθμοί 3x, 2x-1, x-1 δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

8. Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \frac{1}{\alpha+\beta}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

9. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $1+(-3)+9+...+729$.

**10.** Στη γεωμετρική πρόοδο : 5, 10, 20. ... να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων που έχουν άθροισμα 315.

**11.** Να λυθεί η εξίσωση : $1+x+x^2+....+x^9=0$.

**12.** Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $\lambda=2$, $\alpha_\nu=96$ και $S_\nu=189$ να βρείτε :

**i.** το πλήθος των όρων

**ii.** τον $1^o$ όρο

**iii.** το ‘άθροισμα $S=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+.....\alpha_{101}$

**13.** Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $\lambda=-2$, $\alpha_\nu=-96$ και $S_\nu=-63$ να βρείτε τους $\alpha_1$ και ν.

**14.** Αν ο $1^{ος}$ όρος και ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+2=0$ να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.

**15.** Να βρείτε τρείς αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου αν έχουν γινόμενο 9 και άθροισμα 7.

**16.** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου ώστε να έχουν γινόμενο 16 και οι δύο μεσαίοι να έχουν άθροισμα $\frac{20}{3}$.

**17.** Να βρείτε τέσσερις ακέραιους όρους γεωμετρικής προόδου ώστε το γινόμενο των άκρων να είναι -72 και το άθροισμα των δύο πρώτων -3.

**18.** Μεταξύ των αριθμών 3 και 48 να παρεμβάλετε τρείς άλλους αριθμούς ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**19.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

**i.** Αν η ακολουθία $(\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος και έχει λόγο λ τότε $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \lambda$.

**ii.** Αν σε μια ακολουθία είναι $\alpha_\nu \neq 0$ και $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\nu \in N^*$ τότε η ακολουθία $(\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ.

**iii.** Αν ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 1 τότε υπάρχουν όροι που είναι διαφορετικοί.

**iv.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο υπάρχουν όροι της που είναι μηδενικοί.

**v.** Ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου μπορεί να είναι 0.

**vi.** Αν σε μια γεωμετρική ο λόγος λ είναι θετικός τότε όλοι οι όροι της είναι ομόσημοι.

**vii.** Αν σε μια γεωμετρική ο λόγος $\lambda > 1$ τότε κάθε επόμενος όρος είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο του.

**viii.** Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ είναι $0<\lambda<1$ τότε $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in N^*$.

**ix.** Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^\nu$.

**x.** Αν για τους α, β, $\gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$ (1) τότε ο β που ικανοποιεί την (1) είναι ο γεωμετρικός μέσος των α, γ.

**xi.** Αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$ τότε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**xii.** Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$.

**xiii.** Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda=1$ είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$.

**xiv.** Αν σε γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) είναι $S_7=5$ και $S_6=10$ τότε $α_7=-5$.

| i. | ii. | iii. | iv. | v. | vi. | vii. | viii. | ix. | x. | xi. | xii. | xiii | xiv. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | |

**20..** Αν $α_3=4$ και $S_9=0$

**α)** Να βρείτε τα $α_1$ και ω

**β)** Αν η $β_ν$ είναι Γ.Π. με $β_1=8α_1$ και $λ=-\frac{ω}{4}$ ,να βρείτε τον τελευταίο όρο της γεωμετρικής περιόδου που υπερβαίνει το 1 και το άθροισμα

$S=β_1+β_4+β_7+\dots\dots\dots+β_{22}$.

**21.** Έστω η γεωμετρική πρόοδος :6, -3, $\frac{3}{2}$, ….

**i.** Να βρείτε το $ν^ο$ όρο.

**ii.** Να βρείτε τον $α_{11}$.

**iii.** Ποιος όρος ισούται με $-\frac{3}{64}$;

**22.** Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $2+\sqrt{3}$ και $2-\sqrt{3}$.

**ii.** Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί x-1, 1-x, -3x να είναι διαδοχικοί όροι

γεωμετρικής προόδου.

**23.** Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου:

12, -24, 48, ….

**24.** Ένας αγόρασε έναν υπολογιστή αξίας 1500€. Έδωσε προκαταβολή 719€ και το υπόλοιπο ποσό συμφώνησε να το εξοφλήσει σε 5 δόσεις όπου το ποσόν της κάθε δόσης θα είναι τα $\frac{4}{3}$ του ποσού της προηγούμενης δόσης. Να βρείτε το ποσό της 4ης δόσης.

**25.** Ένα μπαλάκι του τένις πέφτει από ένα τραπέζι που έχει ύψος 64cm και αναπηδά στο δάπεδο χάνοντας κάθε φορά το $\frac{1}{4}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης.

**i.** Να βρείτε σε τι ύψος θα φτάσει μετά την 3η αναπήδηση.

**ii.** Να βρείτε την πρώτη αναπήδηση που το μπαλάκι δεν θα ξεπεράσει την απόσταση $\frac{9781}{16}$ cm από το τραπέζι.

**26.** Έστω η γεωμετρική πρόοδος $α_ν$ με $α_3=2x-4$, $α_4=x-2$, $α_5=x$

A) Να βρείτε το x

B) Έστω η ακολουθία $\beta_\nu = a_\nu^2$

I) Να δειχτεί ότι $β_ν$ είναι γεωμετρική πρόοδος

II) Να υπολογίσετε το άθροισμα $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_8^2$

**27.** Δίνεται μια ΓΠ με πρώτο όρο $α_1$ και λόγο $\lambda \neq 0$ για την οποία ισχύει

$$a_1^2 + 5\lambda^2 + \frac{1}{4} = \lambda.(4a_1 + 1)$$

**I)** Να αποδείξετε ότι $α_1=1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ και να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους της προόδου

**II)** Ποιος όρος της προόδου ισούται με $\frac{1}{128}$

**III)** Πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα $\frac{31}{16}$

**28.** Μια ακολουθία ($α_ν$) είναι ΓΠ με και λόγο $a_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0,1$ . Εάν ισχύει $2S_\nu = S_{2\nu}$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}^*$ , τότε :

**I)** Να δείξετε ότι ν είναι άρτιος φυσικός

**II**) Να δείξετε ότι για κάθε άρτιο φυσικό $\kappa \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν
$S_\kappa = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ S_{\kappa+1} = a_1$

**III)** Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ και να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους της προόδου

**IV)** Ποιος όρος της προόδου ισούται με $\frac{1}{128}$

**29.** Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος ($\alpha_\nu$) της οποίας ο 7ος όρος είναι 9, ενώ το άθροισμα του 4ου και του 9ου όρου είναι 16. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της.

**30.** α)Να βρείτε πέντε ακεραίους αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 20 και γινόμενο -560.
β)Να βρείτε τέσσερις ακεραίους αριθμούς, που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο 105.

**31.** Δίνεται μία αριθμητική πρόοδος ($\alpha_\nu$). Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:

$\alpha_4 + \alpha_5$ , $\alpha_7 + \alpha_9$ , $\alpha_{10} + \alpha_{13}$ είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου.

**32.** Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

$\frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$ , $\frac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}}$ , $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

**33.** Σε μια αριθμητική πρόοδο ($\alpha_\nu$) ο 21ος όρος είναι κατά 30 μεγαλύτερος από τον 11ο όρο, ενώ το άθροισμα των πρώτων 24 ορων είναι 300. Να βρείτε:

α) τη διαφορά και τον πρώτο όρο της προόδου

β) το γινόμενο: $\Gamma = 2^{\alpha_1}.2^{\alpha_2}.2^{\alpha_3}......2^{\alpha_{16}}$

**34.** Σε μια αριθμητική πρόοδο (αν) με 2011 όρους, ισχύει $S_{2011}$ = 2011. Να βρείτε:

α) τον μεσαίο όρο της προόδου

β)το άθροισμα:

$S=\alpha_1+\alpha_{1001}+\alpha_{1011}+\alpha_{2011}$

**35.** Σε μια αριθμητική πρόοδο (αν) ισχύει: S2ν = 4Sν για κάθε ν$\in \mathbb{N}^*$

α) Να αποδείξετε ότι ω = $2\alpha_1$

β) Αν επιπλέον ο έβδομος όρος της (αν) είναι 39 τότε:

i) να βρείτε τον α1 και τη διαφορά ω της (αν)

ii) να βρείτε πόσοι πρώτοι όροι της (αν) έχουν άθροισμα 300 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα S20 και S40

iii) να υπολογίσετε το άθροισμα: S = α2 + α4 + α6 + … + α24

**36.** Δίνεται ακολουθία (αν) της οποίας ο ν-οστός όρος είναι αν = 3ν + 1

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (αν) είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να βρείτε το άθροισμα: S = α1 + α3 + α5 + … + α25

**37.** Μεταξύ του 5 και του 49 παρεμβάλλονται ορισμένοι αριθμοί, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Επιπλέον , ο τελευταίος αριθμός που παρεμβάλλεται είναι πενταπλάσιος από τον πρώτο αριθμό που παρεμβάλλεται. Να βρείτε τους παραπάνω αριθμούς.

**38.** Δίνονται οι αριθμοί 2,23 και 35. Μεταξύ των αριθμών 2 και 23 παρεμβάλλονται διπλάσιοι όροι από αυτούς που παρεμβάλλονται μεταξύ του 23 και 35, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να βρείτε όλους τους παραπάνω αριθμούς.

**39.** Ο κατασκευαστής μιας πολυκατοικίας, 12 ορόφων , με πυλωτή καθόρισε ως τιμή πώλησης του πρώτου ορόφου 1.200€/m2 και για κάθε επόμενο όροφο 100€/m2 ακριβότερο από τον προηγούμενό του όροφο.

α) Πόσο πωλείται το διαμέρισμα ανά m2 στον δέκατο όροφο;

β) Πόσο πωλείται ένα διαμέρισμα 82m2 στον δωδέκατο όροφο;

γ) Αν ο κάθε όροφος έχει 200m2 , πόσα χρήματα θα εισπράξει ο κατασκευαστής από την πώληση όλων των διαμερισμάτων;

**40.** Σε μια εταιρία Α ένας υπάλληλος τον πρώτο χρόνο που προσλαμβάνεται θα έχει ετήσιο μισθό 14.000€ , ο οποίος θα αυξάνεται κατά 250€ κάθε χρόνο. Σε μια εταιρεία Β ένας υπάλληλος τον πρώτο χρόνο που προσλαμβάνεται θα έχει ετήσιο μισθό 12.000€, ο οποίος θα αυξάνεται κατά 500€ κάθε χρόνο. Να βρείτε:

α) τον ετήσιο μισθό ενός υπαλλήλου της εταιρείας Α τον 130 χρόνο υπηρεσίας του

β) τα συνολικά χρήματα που έχει πάρει ένας υπάλληλος της εταιρείας Β στα 8 πρώτα χρόνια υπηρεσίας του

γ)σε πόσα χρόνια υπηρεσίας ένας υπάλληλος της εταιρείας Α θα έχει ετήσιο μισθό 20.000€

δ) σε πόσα χρόνια υπηρεσίας ένας υπάλληλος της εταιρείας Α και ένας υπάλληλος της εταιρείας Β , που προσβλήθηκαν ταυτόχρονα , θα έχουν τον ίδιο ετήσιο μισθό.

**41.** Σε έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 550€ τον μήνα . Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 35€ τον μήνα ακριβότερα από το γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 15ου ορόφου από ένα του 7ου ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τα 1.000€ το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι κατά 2 μικρότερο από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17ος όροφος έχει 12 γραφεία, να βρείτε:

i) πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος

ii) πόσα γραφεία υπάρχουν συνολικά στον ουρανοξύστη

iii) πόσο θα κοστίσει τον μήνα σε έναν επιχειρηματία να ενοικιάσει όλα τα γραφεία που βρίσκονται στον μεσαίο όροφο του ουρανοξύστη.

**42.** Σε μια αριθμητική πρόοδο (αν) το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της είναι 40 , ενώ το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της είναι 135. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και της διαφορά της προόδου

β) την τιμή της παράστασης A = $= \sqrt[20]{\alpha_{17}^3 . \sqrt{\alpha_8^4 . \sqrt[3]{\alpha_5^2}}} . \sqrt[6]{\alpha_2^2}$

γ) το άθροισμα: $S = \alpha_{10} + \alpha_{11} + \ldots + \alpha_{27}$

**43.** Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) της οποίας ο 13ος όρος είναι -32 και το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της είναι 84.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της αριθμητικής προόδου (αν).

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + \alpha_7 x^2 = \alpha_5$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x^3 + \alpha_{12}}{x^2 - 5x - S_{12}} \geq 0.$

**44.** Σε μια αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ , ισχύει: $α_3 + α_4 + α1_2 = 10$ και ο όρος $α_{13}$ είναι τριπλάσιος από τον όρο $α_8$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και η διαφορά της προόδου

β) Να βρείτε τον όρο αν για τον οποίο ισχύει $α_ν = 2ν$

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 – α_9 \cdot x + S_{12} \leq 0$

**45.** Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$ , με διαφορά $ω \neq 0$ , για την οποία ισχύει:

$α_1 + α_8 = α_2 + α_4 + α_9$

α) Να βρείτε τον όρο $α_6$

β) Να αποδείξετε ότι $α_5 \cdot α_7 < 0$

γ) Να αποδείξετε ότι: $α_{2ν-6} – 2α_ν$ για κάθε $ν \geq 4$

δ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{S_{44}}{S_{22}}$ .

**46.** Αν $–χ^3 + κ$ , $χ^2 + 3 + κ$, $-3χ + κ$, με τη σειρά που δίνονται , είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 27 , τότε :

α) να αποδείξετε ότι $χ = -2$

β) να βρείτε τον αριθμό κ

γ) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο $α_{20}$ της προόδου

δ) να υπολογίσετε το άθροισμα $S_{20}$ των εικοστών όρων της προόδου.

**47.** Σε μια αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ ισχύει $S_{20} = 820$ και η σχέση:

$α_2 + α_4 +α_6 + ... + α_{20} = 430$

Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου

β) το άθροισμα: $S = α_{21} + α_{22} + ... + α_{30}$

γ) την τιμή του $κ \in \mathbb{N}$ ώστε οι αριθμοί $α_κ$ , $α_{5κ-1}$ , $α_{24κ-4}$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

**48.** Σε μια αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ , ο 4ος όρος είναι -5, ενώ το άθροισμα του 7ου και του 11ου όρου είναι 20.

Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου

β) πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα -5 γ) το άθροισμα S = $α_1 + α_3 + α_5 + ... + α_{25}$

δ) το άθροισμα των όρων $α_κ$ για τους οποίους ισχύει ότι $a_κ^2 \le 14α_κ + 95$

**49.** Δίνεται αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) της οποίας οι όροι $α_4$ και $α_{16}$ είναι αντίθετοι.

α) Να βρείτε τον όρο $α_{10}$

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{a_{2ν} - 10}{a_ν}$ για κάθε ν ≥ 6 και ν ≠ 10

γ) Αν επιπλέον αριθμητικός μέσος των $α_{13}$ και $α_{18}$ ισούται με 11, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $α_1 = -18$ και $ω = 2$

ii) να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων $α_ν$ για τους οποίους η εξίσωση $χ^2 + α_ν \cdot χ + 5ν = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

**50.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) με ακεραίους όρους, ο πέμπτος όρος είναι 16, ενώ ο έκτος και ο έβδομος όρος έχουν άθροισμα 96. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της ($α_ν$)

β) τον όρο $α_9$

**51.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) ο έκτος όρος είναι 24 , ενώ ο τρίτος και ο τέταρτος όρος έχουν γινόμενο 18. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της ($α_ν$)

β) τον όγδοο όρο της ($α_ν$)

**52.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) , ισχύει: $\frac{a_6 + 4a_4}{a_5} = 4$

α) Να βρείτε τον λόγο λ της ($α_ν$)

β) Αν επιπλέον ο όγδοος όρος της ($α_ν$) είναι κατά 16 μεγαλύτερος από τον $α_7$, να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο της ($α_ν$)

ii) τον όρο της $α_{10}$

**53.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) , ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος έχουν άθροισμα 30, ενώ ο πέμπτος και ο έβδομος όρος έχουν άθροισμα 810.

Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο $α_1$ και τον λόγο λ της ($α_ν$)

β) τον όρο $α_4$

γ) το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της ($α_ν$)

**54.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) ισχύει ότι $α_5 \cdot α_7 = α_{11}$ και το άθροισμα των 3 πρώτων όρων της είναι $\frac{3}{4}$ . Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της ($α_ν$)

β) το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της ($α_ν$)

**55.** Δίνεται γεωμετρική πρόοδος της ($α_ν$) για την οποία ισχύει

$$\frac{S_{10}}{S_5} = 33.$$

Να βρείτε:

α) τον λόγο λ της ($α_ν$)

β) το πηλίκο $\frac{S_6}{a_6}$ .

**56.** Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) ισχύει:

$$\frac{a_7 - a_6 - a_5}{a_4 - a_3 - a_2} = 27$$

Να βρείτε:

α) τον λόγο λ της προόδου

β) το πηλίκο $\dfrac{2S_{2013}+a_1}{2S_{2011}+a_1}$ .

**57.** Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύουν:
$α_1 + α_2 = 10$ , $α_2 + α_3 = 15$

Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τον λόγο της (αν)

β) τον όρο $α_5$

γ) το πηλίκο $\dfrac{S_\nu+8}{a_\nu}$ , για την ν $\in \mathbb{N}^*$

**58.** Δίνεται μια γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$) της οποίας το άθροισμα των πρώτων τριών όρων περιττής τάξης είναι 105 , ενώ το άθροισμα των πρώτων τριών όρων άρτιας τάξης είναι -210. Να βρείτε:

α) τον λόγο και τον πρώτο όρο της ($α_ν$)

β) τον όρο $α_9$

γ) το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της ($α_ν$)

δ) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $α_2$ και $α_6$

**59.** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου που έχουν γινόμενο 27 και άθροισμα 13.

**60.** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου που έχουν γινόμενο 64 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 84.

**61.** Να βρείτε 4 αριθμούς που αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου και έχουν γινόμενο 729 , ενώ τα τετράγωνα των δύο τελευταίων αριθμών έχουν γινόμενο 59.049.

**62.** Σε μια κοινωνία μικροβίων ρίχνεται ένα φάρμακο , με αποτέλεσμα κάθε μία ώρα το πλήθος των μικροβίων που είναι ζωντανά να φτάνει στο $\frac{1}{4}$ του πλήθους των μικροβίων της προηγούμενης ώρας. Αν αρχικά υπήρχαν 220 μικρόβια , να βρείτε το πλήθος των μικροβίων που έμειναν ζωντανά 8 ώρες μετά τη ρίψη του φαρμάκου.

**63.** Τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τις εφαπτόμενες των οξειών γωνιών του.

**64.** Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

α) Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες

β) Στο τέλος της 6ης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μία ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή 33 · 10 βακτηριδίων κάθε ώρα.

i) Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό

ii) Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

**65.** Σε ένα θέατρο , η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

α) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου

γ) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου , σ΄αυτό το θέατρο , την παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση , ο αριθμός των θεατών διπλασιάζονταν.

Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

**66.** Έστω δύο κοινωνίες βακτηριδίων Α και Β . Αν συμβολίσουμε με $A_0$ τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Α και με $B_0$ τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Β, τότε είναι: $9A_0 = 1011B_0$. Ο πληθυσμός της κοινωνίας Α μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού της, ενώ ο πληθυσμός της κοινωνίας Β αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ. Οι δύο πληθυσμοί γίνονται ίσοι με 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου που αναφέρεται στον πληθυσμό Β είναι λ = 10.

β) Πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή, ο πληθυσμός της κοινωνίας Β είναι 9 · 1010 βακτηρίδια . Να αποδείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας Β είναι 9 · 105 βακτηρίδια.

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας Α, 99 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

**67.** Δίνεται γεωμετρική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{a_{71}.a_{81}}{a_{51}} = 2$$

Να βρείτε:

α) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $\alpha_{99}$ και $\alpha_{103}$

β) το γινόμενο των πρώτων 201 όρων της.

**68.** Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ και μια γεωμετρική πρόοδος $(\beta_\nu)$, οι οποίες έχουν $\alpha_1 = \beta_1$ και $\alpha_2 = \beta_2$.

Αν επιπλέον ισχύει $\beta_5 – \beta_4 = 24$ και $\alpha_5 – \alpha_4 = 3$, να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της $(\alpha_\nu)$ , καθώς και τον πρώτο όρο και τον λόγο της $(\beta_\nu)$

β) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $\beta_2$ και $\alpha_8$

γ) ποιος όρος της $(\alpha_\nu)$ είναι ίσος με τον $\beta_7$