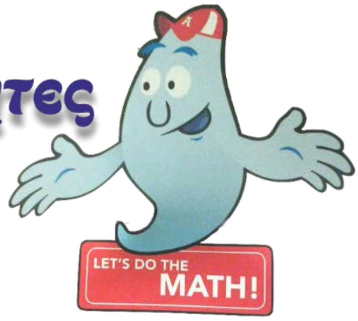
Ασκήσεις ταυτότητες



1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα

$(2x+7)^2 =$ $\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y\right)^2 =$

$(3x^2-x^3)^2 =$ $(-\alpha^3-\alpha)^2 =$

$(6x-1)^2 =$ $(\alpha^3\beta^2-3\alpha\gamma^2)^2 =$

$(\alpha^x+\beta^y)^2 =$ $(\alpha^{x-1}+2\alpha\beta)^2 =$

2. Να βρεθούν τα διώνυμα που έχουν αναπτύγματα τα παρακάτω Πολυώνυμα

i) $4x^2+4xy+y^2$ **ii)** $\frac{x^2}{9}-2x+9$

iii) $x^{2v}+2x^v+1$ **iv)** $25x^2-20x+4$

v) x^2-6x+9 **vi)** $\frac{4}{25}x^2+\frac{16}{5}xy^2+16y^4$

vii) $4x^2+x+\frac{1}{16}$ **viii)** $25x^2+10x+1$

3. Να βρείτε τα γινόμενα

i) $(3\alpha-2\beta^3)(2\beta^3+3\alpha)$

ii) $(\alpha\beta+3)(\alpha\beta-3)$

iii) $(\alpha^2\beta-\gamma)(\alpha^2\beta+\gamma)$

iv) $(x+y-1)(x+y+1)$

v) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

4. Να γίνουν οι πράξεις

i) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

ii) $(2\alpha-3\beta)(4\alpha^2+9\beta^2)(2\alpha+3\beta)$

iii) $(xy+1)(x^2y^2+1)(xy-1)(1+x^4y^4)$

iv) $(\alpha\beta+1)(-\alpha^2\beta^2-1)(-\alpha\beta+1)$

v) $(x-y)(-x-y)(-x^2-y^2)$

5. Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(2α+3β-1)^2$ **iii)** $(x+2y+z)^2$

ii) $(x^2-x+1)^2$ **iv)** $(2x-1)^3$

$v)\ (-2x^3-y^2)^2$ vi) $(-3+a)^3$

6. Να εκτελεστούν οι πράξεις

i) $(x+2)^2-(x+3)(x-3)-2(2x-3)$

ii) $(2x+1)^2-(3x-2)^2-(2x+5)(5-2x)$

iii) $2(α-2β)^2-3(α+3β)^2-(2α+3β)(3α-2β)$

iv) $(1+xy)(1-xy)(1+x^2y^2)(1+x^4y^4)+(1-x^4y^4)^2$

v) $3(α^v+α^{-v})^2-4(α^v-2α^{-v})^2$

vi) $(2x+1)^2-4x-1-(3x-1)(3x+1)$

vii) $(1-2x)^2-x(-x-1)^2+(2-3x)(2+3x)$

7. Να αποδείξετε τις ισότητες

i) $(α^2+4)(x^2+1)-(αx+2)^2=(2x-α)^2$

ii) $(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3+3x^2y^2(x+y)^2=(2xy)^3$

iii) $\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2=x^3$

iv) $(α^2+β^2)(x^2+y^2)-(αx+βy)^2=(αy-βx)^2$

v) $\left(\frac{α+β}{2}\right)^2-\left(\frac{α-β}{2}\right)^2=αβ$

8. Να αποδείξετε ότι :

$$(α-β)^2-2(α-β)(α+β)+(α+β)^2=4β^2$$

9. Να αποδείξετε ότι :

$$(α-β)^3-α(α+β)^2+5α^2β=β^2(2α-β)$$

10. Να δείξετε ότι :

$$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^6-1$$

11. Αν $α+β+γ=0$, να αποδείξετε ότι :

$$α^2+β^2=γ^2-2αβ$$

12. Αν $α+β+γ=2$ και $\frac{1}{α}+\frac{1}{β}+\frac{1}{γ}=0$, να αποδείξετε ότι: $α^2+β^2+γ^2=4$

13. Να κάνετε τις πράξεις :

$\alpha)\ (2a-5)^2-4(a-2)(a+2)$ $\beta)\ 4(x-3)^2-(2x+6)^2$

$\gamma)\ (1-x)^3-x(x+2)(2-x)-3(x+1)^2$

$\delta)\ (x-1)^3-x(x-2)^2-(x+3)(x-3)$

$\varepsilon)\ (2x+3)^3-(6x-5)(6x+5)-2x(1+2x)(2x-1)$

14. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

$\alpha)\ (3a+1)^2-(9a^2+1)=6a$ $\beta)\ (x+3)^2-(x-3)^2=12x$

15. Αν α + β = -2 και αβ = -3, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $\alpha^2+\beta^2$ **ii.** $\alpha^3+\beta^3$ **iii.** $\alpha^4+\beta^4$

16. Αν $x-\frac{1}{x}=-3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $x^2+\frac{1}{x^2}$ **ii.** $x^3-\frac{1}{x^3}$ **iii.** $x^4+\frac{1}{x^4}$

17. Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος και ο α^2 περιττός , να δείξετε ότι ο α είναι περιττός.

18. Να δείξετε ότι η πρόταση «για κάθε αριθμό α ισχύει $(\alpha+2)^2=\alpha^2+2^2$» δεν είναι αληθής.

19. Να γίνουν οι πράξεις

i) $(2\alpha-1)(2\alpha+1)(4\alpha^2+1)(16\alpha^4+1)$

ii) $(1+x^2)(1-x^2+x^4)+(1-x^3)(1+x^3)$

iii) $(x-1)^2(x+1)^2-(x^2+1)^2$

20. Αν $x+y=3$ και $xy=2$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i) x^2+y^2 **ii)** x^3+y^3 **iii)** x^4+y^4

21. Αν $\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ να υπολογιστούν

i) $\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}$ **ii)** $\alpha^3+\frac{8}{\alpha^3}$

22. Αν $x^2+y^2=1$ να δειχθεί ότι

$(3x-4x^3)^2+(3y-4y^3)^2=1$

23. Αν $x+y=2$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=x^3+y^3-3\left(x^2+y^2\right)$$

24. Αν $x=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2$, $y=2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2$ και $\omega=\alpha^2+\beta^2$, να δειχθεί ότι $x^2+y^2=\omega^6$

25. Για τους αριθμούς α και β ισχύει:

$$(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-2(1-\beta)(\beta+1)$$

Α) Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha^{2011}.\beta^{2011}$

Β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A=\left(\alpha-\beta-3\right)^2-\left(\alpha-3\right)^2-\left(\beta+3\right)^2$$

26. Για τους αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left(-1\right)^{2012}.\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(-1\right)^{2011}.\left(\alpha-\beta\right)^2=4 \qquad (1)$$

$$\left(\alpha-\beta-1\right)\left(\alpha+\beta-1\right)=-2\left(1+\alpha-a^2\right) \qquad (2)$$

Α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι

Β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2$

Γ) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

Ι) $A=\left(\alpha+\beta\right)^2$ ΙΙ) $A=\alpha^4+\beta^4$

27. Να αποδείξετε την ισότητα

$$\left(\alpha-\beta\right)^3+\left(\beta-\gamma\right)^3+\left(\gamma-\alpha\right)^3=3\left(\alpha-\beta\right)\left(\beta-\gamma\right)\left(\gamma-\alpha\right)$$

28. Να λυθεί η εξίσωση : $x^3+\left(x-1\right)^3-\left(2x-1\right)^3=0$

29. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x-4\right)^3+8\left(x-1\right)^3+27\left(2-x\right)^3=0$$

30. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$A=\left(\alpha\kappa+\beta\lambda\right)^3+\left(\beta\kappa+\gamma\lambda\right)^3+\left(\gamma\kappa+\alpha\lambda\right)^3$$

31. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=0$$

32. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=0$$

33. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να δειχθεί ότι η παράσταση

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$$ είναι ανεξάρτητη των α,β,γ

34. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ να δείξετε ότι αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^4}{3\alpha\beta\gamma-\beta^3-\gamma^3}+\frac{\beta^4}{3\alpha\beta\gamma-\gamma^3-\alpha^3}+\frac{\gamma^4}{3\alpha\beta\gamma-\beta^3-\alpha^3}=0$$

35. Για τους ακεραίους x,y,ω ισχύει $3^{x^3+y^3}=\left(\frac{27^{xy}}{3^{\omega^2}}\right)^{\omega}$ και $x+y+\omega\neq 0$. Να δειχθεί ότι $x=y=\omega$.

36. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με **Σωστό** (Σ) ή **Λάθος** (Λ).

i) $(a-\beta)^2=(\beta-a)^2$

ii) $(-a-\beta)^2=(a+\beta)^2$

iii) $(a+\beta)^2=-(-a-\beta)^2$

iv) $(a-\beta)^3=(\beta-a)^3$

v) $(-a-\beta)^3=-(a+\beta)^3$

37. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα .

i. x^2 - 2x + ...
ii. x^2 + 4x + ...
iii. α^2 – 3α + ...
iv. α^2 + 6/5α + ...
v. α^2 + 6αβ + ...
vi. α^2 + αβ + ...

38. Αν ισχύει $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ να αποδειχθεί ότι : $x^3+\frac{1}{x^3}=0$

39. Α) Να αποδειχθεί ότι 1001 είναι πολλαπλάσιο του 11
Β) Όμοια 2^{18}+1=πολλαπλάσιο του 15