



# Ασκήσεις

1. Αν  $a > 1$ , να δείξετε ότι:  $a^3 > a^2 - a + 1$

2. Να δείξετε ότι:  $-1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$

3. Να δείξετε ότι:

i)  $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq a\beta + \beta\gamma + \gamma a$

ii)  $5x^2 + 4xy + 2x + y^2 \geq -5$

iii) Αν  $a \geq -1$  τότε  $a^3 + 1 \geq a^2 + a$

iv) Αν  $-2 < a < 2$  τότε  $a^4 - 2a^3 + 8a - 16 < 0$

4. Να δείξετε ότι: **α)**  $a^2 - 6a + 10 > 0$

**β)**  $2a^2 - 2a + 1 > 0$

5. Αν  $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ , να βρείτε τους  $x, y$

6. Να δείξετε ότι :

Αν  $a + \beta = 2$  τότε  $a\beta \leq 1$  και  $a^2 + \beta^2 \geq 2$

7. Αν  $0 < a \leq 2$  και  $1 \leq \beta < 3$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

**α)**  $2a + 3\beta$

**β)**  $3a - \beta + 2$

**γ)**  $a/\beta$

**δ)**  $a^2 - \beta^2$

8. Αν  $a < 2 < \beta$ , να δείξετε ότι:

**α)**  $(a-2)(\beta-2)(a-\beta) > 0$

**β)**  $a^2 + 2\beta > a\beta + 2a$

9. Να δείξετε ότι:  $a^2 + \beta^2 / 2 \geq (a + \beta / 2)^2$

10. Να αποδείξετε ότι:

i.  $(a^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + \beta y)^2$

ii.  $101 \cdot (x^2 + y^2) \geq (10x + y)^2$

11. Αν  $x < 1$  και  $y < 1$  να δείξετε ότι  $x + y - xy < 1$

12. Αν  $0 < a < \beta$ , να δείξετε ότι:

i.  $a - \frac{1}{a} < \beta - \frac{1}{\beta}$

ii.  $a^2 - \frac{1}{a} + 1 < \beta^2 - \frac{1}{\beta} + 1$

13.

i. Αν  $x > 1$ , να δείξετε ότι  $x^2 + x^5 < x^3 + x^7$

ii. Αν  $0 < x < 1$ , να δείξετε ότι  $x + x^4 > x^2 + x^7$

14. Να δείξετε ότι:

i.  $x^2 - 4x + 5 > 0$

ii.  $2a^2 + 2a + 3 > 0$

iii.  $a^2 + \beta^2 - 2a + 1 \geq 0$

iv.  $2a^2 + \beta^2 - 2a\beta + 2a + 1 \geq 0$

15. Να δείξετε ότι:  $a^2 + \beta^2 - 4a + 6\beta \geq -13$

16. Αν  $1 < x \leq 3$  και  $2 \leq y < 5$ , να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

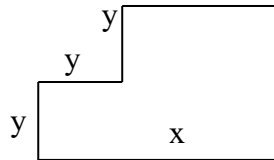
i.  $2x + y$

ii.  $x - 3y$

iii.  $xy$

iv.  $x/y$

17. Αν  $1,9 < x < 2,1$  και  $0,7 < y < 0,8$  να εκτιμήσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.



23. Αν  $a > 0$ , να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς :

a)  $\alpha^2\beta - \alpha^3$  με  $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$

β)  $(\alpha + 1)^3$  με  $1 + 3\alpha + 3\alpha^2$

24. A) Να αποδείξετε ότι :  $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2(\alpha - 2\beta)$

B) Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

25. A) Να αποδείξετε ότι :  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta + 2 \geq 0$

B) Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta \neq 0$  είναι ετερόσημοι, να συγκρίνετε τους

αριθμούς :  $\frac{2-\alpha}{\beta}$  και  $\frac{\beta+2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha\beta}$

26. Έστω  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ . Να αποδείξετε ότι :

A)

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$$

B)  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$

Γ) αν επιπλέον ισχύει  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  τότε  $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \geq 8$

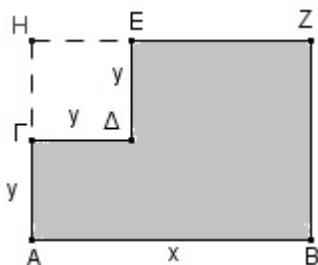
27. Αν ισχύει,  $1 \leq a \leq 3, -4 \leq \beta \leq -2$

να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = 2a + 3\beta, \quad B = a - \beta, \quad \Gamma = a^2 + \beta^2, \quad \Delta = \frac{a}{\beta}$$

28. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς  $y$ .

A) να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση  $\Pi = 2x + 4y$



B) αν ισχύει  $5 < x < 8$  και  $1 < y < 2$  να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.