Διάταξη αριθμών

Α. Πότε ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος του β;

Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β, σύμβολο **α>β**, όταν η διαφορά είναι θετικός αριθμός δηλαδή

α>β⇒α-β>0

Β. Πότε ο αριθμός α είναι μικρότερος του β;

Ο αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β, σύμβολο **α<β**, όταν η διαφορά είναι αρνητικός αριθμός δηλαδή

α<β⇒α-β<0

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Α. Ισχύουν:

1. **i.** Για κάθε α∈R, έχουμε:

$$\begin{array}{c} a>0 \\ \acute{\eta} \\ a<0 \\ \acute{\eta} \\ a=0 \end{array}$$

ii. Αν ο **α είναι μη αρνητικός**, τότε **α≥0 ⇔ α>0 ή α=0**

iii $\left.\begin{array}{l} a>\beta \\ \beta>\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow a>\gamma$ [**μεταβατική** ιδιότητα]

Β. Πρόσημο αθροίσματος, αν είναι γνωστό το πρόσημό τους

$a>0$ $\beta>0$	$a+\beta>0$
$a<0$ $\beta<0$	$a+\beta<0$

$a\geq 0$ $\beta\geq 0$	$a+\beta\geq 0$
$a\leq 0$ $\beta\leq 0$	$a+\beta\leq 0$

Γ. Πρόσημο γινομένου, αν είναι γνωστό το πρόσημό τους

$\alpha>0$ $\beta>0$	$\alpha\cdot\beta>0$
$\alpha<0$ $\beta<0$	$\alpha\cdot\beta>0$

$\alpha>0$ $\beta<0$	$\alpha\cdot\beta<0$
$\alpha\le 0$ $\beta\le 0$	$\alpha\cdot\beta\ge 0$

Δ. Διάταξη και τετράγωνο αριθμού – άθροισμα τετραγώνων

4. i. $\alpha^2\geq 0$, για κάθε **$\alpha\in R$** **ii. $\alpha^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$**

iii. $\alpha^2\leq 0 \Leftrightarrow \alpha=0$ **[το “=” ισχύει μόνο, όταν α=0]**

iv.

$$\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \quad \alpha=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta=0$$

$$\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \quad \alpha\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta\neq 0$$

Ε. Διάταξη και δυνάμεις

$$\alpha,\beta>0,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon \begin{cases} \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^2<\beta^2 \\ \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^* \\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^3<\beta^3 \\ &\alpha^3=\beta^3 \Leftrightarrow \alpha=\beta \\ &\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^{2\nu+1}<\beta^{2\nu+1},\ \nu\in\mathbb{N} \\ &\alpha^{2\nu+1}=\beta^{2\nu+1} \Leftrightarrow \alpha=\beta,\ \nu\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\text{Αν}\ \alpha,\ \beta<0,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon \begin{cases} \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^2>\beta^2 \\ \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^{2\nu}>\beta^{2\nu},\ \nu\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Αν}\quad x>1, \qquad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \qquad x<x^2<x^3<\ldots.. \\ &\text{Αν}\ \ 0<x<1,\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon \qquad x>x^2>x^3>\ldots.. \end{aligned}$$

ΣΤ. Βασικές ανισότητες

1. $a^2+\beta^2 \geq 2a\beta$ **[το «=» ισχύε ι μόνο για α=β]**

2. $\begin{cases} a^2+a\beta+\beta^2 \geq 0 \\ a^2-a\beta+\beta^2 \geq 0 \end{cases}$

[το «=» ισχύει μόνο για α=β=0]

3. $a+\frac{1}{a} \geq 2$**, για κάθε α>0(το «=» ισχύει μόνο για α=1)**

$a+\frac{1}{a} \leq -2$**, για κάθε α<0 (το «=» ισχύει μόνο για α=-1)**

1. **Αν α, β ομόσημοι, τότε α<β** $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$
2. $-\frac{1}{2a} \leq \frac{x}{x^2+a^2} \leq \frac{1}{2a}$ **,για κάθε α>0 [το «=» ισχύει αντίστοιχα μόνο για x=-α και x=α]**

Ζ. Πρόσθεση ενός αριθμού στα δυο μέλη μιας ανισότητας:

$$a>\beta \Leftrightarrow a+\gamma>\beta+\gamma$$

Η. Πολλαπλασιασμός δυο μελών μιας ανισότητας με έναν αριθμό :

$$a>\beta \overbrace{\Leftrightarrow}^{\gamma>0} a\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$$

$$a>\beta \overbrace{\Leftrightarrow}^{\gamma<0} a\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$$

Θ. Πρόσθεση κατά μέλη δυο ανισοτήτων :

$$a>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma>\delta \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad a+\gamma>\beta+\delta$$

Ι. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη δυο ανισοτήτων :

Για τους **θετικούς αριθμούς α,β,γ,δ** ισχύει η συνεπαγωγή

$$a>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma>\delta \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad a\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$$