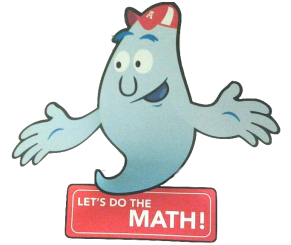




Ασκήσεις στις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού



1. Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda-1)x^2 + |\lambda|x - \lambda = 0$ (1) να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το 1.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2 - 4 = 0$ ii. $2x^2 - 1 = 0$ iii. $3x^2 + 1 = 0$ iv. $3x^2 - x = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $6x^2 - x - 1 = 0$ ii. $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ iii. $x(x-1) = -1$

4. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

5. Να βρεθούν τα κ και λ ώστε η εξίσωση: $3x^2 + 8(\kappa - 3)x + 5(\lambda - 2) = 0$, να έχει σαν διπλή ρίζα το 0.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$2x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$$

7. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha - \beta)x - 1 = 0$ (1) για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\alpha^2 x^2 - 2\alpha^3 x + \alpha^4 - 1 = 0$ $\alpha \neq 0$

ii. $x^2 + (\beta - 2\alpha)x + \alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2 = 0$

9. Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0$ με $\lambda \neq 0$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση αυτή

I) έχει δυο ρίζες άνισες

II) έχει μια διπλή ρίζα

III) δεν έχει πραγματικές ρίζες

10. Η εξίσωση : $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ με $\lambda \neq 0$ έχει διακρίνουσα 4

I) Να βρείτε τις τιμές του λ

II) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση

11. Δίνονται οι εξισώσεις

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 & (1) \\ x^2 + (2\lambda - 9)x + \lambda^2 - 6\lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

Η μικρότερη ρίζα της (1) είναι ρίζα και της (2).

A) Να βρείτε το λ

B) Να βρείτε τις ρίζες της (2)

12. Η εξίσωση : $(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

- I) Να βρείτε τις τιμές του λ
II) τη διπλή ρίζα

13. Αν η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα, να βρείτε το λ και μετά τη διπλή ρίζα της (1).

14. Αν η εξίσωση $\lambda^2 x^2 + (5\lambda - 2)x + \lambda + 2 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -1 , να βρείτε το λ και μετά να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης(1).

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \sqrt{\lambda + 3}x + \lambda = 0$ (1)

- A) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες άνισες
B) Να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

16. A) Να βρείτε το ανάπτυγμα $(2 - \sqrt{3})^2$

- B) Να λύσετε την εξίσωση :

$$3 - 2(x - 2\sqrt{3}) = -(x - 3)(x + 3)$$

- Γ) Αν x_1 είναι η μικρότερη ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{x_1}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0$ (1)

A) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta = (\sqrt{3} - 3)^2$

B) Να λύσετε την εξίσωση (1)

Γ) Αν ρ είναι η άρρητη ρίζα της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2} \text{ είναι ακέραιος.}$$

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6\lambda x + 9\lambda^2 - 1 = 0$ (1)

- A) Να λυθεί η εξίσωση (1) (B) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να ανήκουν στο διάστημα $[0, 3)$.

19. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 - \lambda^3 x - (|\lambda| + 1) = 0 \text{ έχει 2 ρίζες για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

20. Αν η εξίσωση $x^2 - 2(2\alpha - \beta)x - |\alpha - 1| = 0$ έχει διπλή ρίζα, να βρείτε τους α και β .

21. Δίνεται η εξίσωση $\mu x^2 + 2(\mu + 3)x + \mu - 1 = 0$, $\mu \neq 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση:

- i. Έχει διπλή ρίζα στο \mathbb{R} η οποία και να βρεθεί
- ii. Έχει δύο ρίζες άνισες στο \mathbb{R} .
- iii. Δεν έχει ρίζες στο \mathbb{R}

22. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 3)x^2 - (2\mu + 1)x + 3\mu = 0$. Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 3; Κατόπιν να λύσετε την εξίσωση για τις τιμές του μ που βρήκατε.

23. Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)x^2 - 2\mu x + \mu + 2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

24. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες άνισες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma + \lambda(\alpha x + \beta) = 0$ έχει ρίζες άνισες στο \mathbb{R} για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

25. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ (1)

A) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η (1) έχει δυο πραγματικές ρίζες.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1) ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$

Γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \left(\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1} + \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 9} \right)^2 \text{ είναι ανεξάρτητη του } \lambda \text{ που}$$

βρήκατε.

26. Η εξίσωση : $x^2 + \lambda\sqrt{2}x - \mu(\mu - \lambda) - \left(\mu + \frac{1}{2} \right) = 0$ (1)

έχει μια διπλή ρίζα.

A) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

B) Αν ρ είναι η διπλή ρίζα της (1), τότε :

I) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 + (\rho - 1)x - \rho = 0$$

II) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ σε ισοδύναμο με ρητό

παρονομαστή.

27. Η εξίσωση : $x^2 + 2\sqrt{\alpha + \beta}x - \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma > 0$

έχει μια διπλή ρίζα. Να αποδείξετε:

A) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

B) Η εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{4}x^2 + \sqrt{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}x + 3\sqrt{\alpha\beta\gamma} = 0$$

έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να βρείτε.

- 28.** Για ποιες τιμές του a η παρακάτω εξίσωση είναι αδύνατη;
- i. $x(x+a)+4=0$
 - ii. $x^2+9=4ax$
- 29.** Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $3x^2-\lambda x+3=0$ έχει μία μόνο ρίζα και η εξίσωση $2x^2-2x+\lambda=0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες;
- 30.** Αν οι εξισώσεις $x^2+ax+\beta=0$ και $x^2+\beta x+a=0$ ($a \neq 0, \beta \neq 0$) έχουν $2x(x+1)=a-x^2$ μία μόνο κοινή ρίζα ναδειχτεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2+(a+\beta)x=(a+\beta)^2$ είναι $x_1=1$ και $x_2=-\frac{1}{2}$
- 31.** Για ποιες τιμές του a η εξίσωση έχει διπλή ρίζα. Ποια είναι αυτή η διπλή ρίζα.