



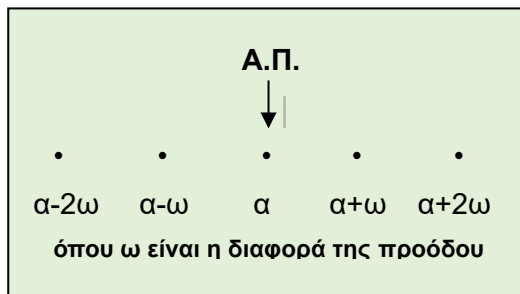
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σε ορισμένες ασκήσεις δίνεται το **άθροισμα** και το **γινόμενο** τριών ή τεσσάρων ή πέντε , κ.λ.π. **διαδοχικών όρων** μιας αριθμητικής προόδου και ζητείται να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Η λύση τέτοιου είδους ασκήσεων απαιτείται να ορισθούν οι διαδοχικοί όροι με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

α. Όταν δίνεται **περιττό πλήθος** διαδοχικών όρων (3,5,...) υπάρχει πάντα ένας

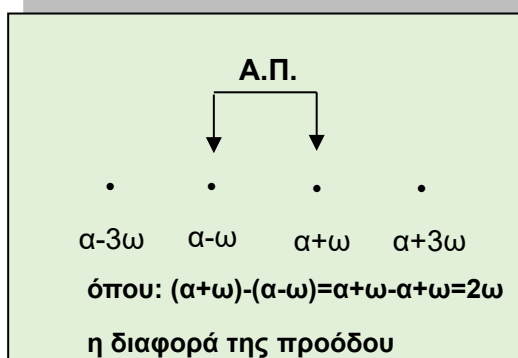
"μεσαίος όρος".

Αν έχουμε π.χ. 5 όρους τους συμβολίζουμε :



β. Όταν μας δίνεται **άρτιο πλήθος** διαδοχικών όρων (4,6,...) υπάρχουν δύο "μεσαίοι όροι".

Αν έχουμε π.χ. 4 όρους τους συμβολίζουμε :



2. Όταν δίνεται ο γενικός όρος (a_n) μιας ακολουθίας και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι αριθμητική πρόοδος, πρέπει να δείξουμε ότι η διαφορά : $a_{n+1}-a_n$ είναι σταθερή.



Παράδειγμα 1

Αν n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n=12-4n$, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος

Πράγματι :

$$a_{n+1}-a_n=[12-4(n+1)]-(12-4n)=12-4n-4-12+4n=-4$$

Άρα (a_n) είναι Α.Π. με διαφορά $\omega=-4$ και πρώτο όρο $a_1=12-4\cdot 1=8$.

3. Όταν δίνεται το άθροισμα S_n των πρώτων n όρων ($n \in \mathbb{N}^*$) μιας ακολουθίας (a_n) και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος εργαζόμαστε ως εξής :

$$\text{Το } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1) \quad \text{και} \quad S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad (2)$$

Αφαιρούμε από την (1) την (2) και έχουμε $S_n - S_{n-1} = a_n$ άρα έχουμε έτσι τον n -οστό όρο της ακολουθίας (a_n) .

Κατόπιν, εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση (2) για να δείξουμε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.



Παράδειγμα 2 Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το άθροισμα των n

πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) δίνεται

$$\text{από τον τύπο } S_n = \frac{1}{4}n^2 - n, \text{ Τότε :}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \left(\frac{1}{4}n^2 - n \right) - \left[\frac{1}{4}(n-1)^2 - (n-1) \right] = \\ &= \frac{1}{4}n^2 - n - \left[\frac{1}{4}(n^2 - 2n + 1) - n + 1 \right] = \frac{1}{4}n^2 - n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} + n - 1 = \\ &= \frac{1}{2}n - \frac{5}{4} \Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{2}n - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

που είναι ο n -οστός όρος της ακολουθίας και

$$a_{v+1} - a_v = \left[-\frac{1}{2}(v+1) - \frac{5}{4} \right] - \left(\frac{1}{2}v - \frac{5}{4} \right) = -\frac{1}{2}v - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2}v + \frac{5}{4} = -\frac{1}{2},$$

σταθερή

Άρα είναι αριθμητική πρόοδος.



Παράδειγμα 3

Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω ισχύει

$a_7 + a_{17} = 30$ και $a_9 + a_{20} = 40$. Να βρεθεί το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του 10^{ου} και 27^{ου} όρου.

Λύση

Αν θυμηθούμε τον γενικό όρο μιας ΑΠ που είναι $a_v = a_1 + (v-1)\omega$ έχουμε με αντικατάσταση :

$$\begin{cases} a_7 + a_{17} = 30 \\ a_9 + a_{20} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 6\omega + a_1 + 16\omega = 30 \\ a_1 + 8\omega + a_1 + 19\omega = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 22\omega = 30 & (1) \\ 2a_1 + 27\omega = 40 & (2) \end{cases}$$

Με αφαίρεση (2) - (1) έχουμε :

$5\omega = 10$ δηλαδή $\omega = 2$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε

$$2a_1 + 22 \cdot 2 = 30 \Leftrightarrow 2a_1 = 30 - 44 \Leftrightarrow 2a_1 = -14 \Leftrightarrow a_1 = -7$$

Έστω $S = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{26}$ το ζητούμενο άθροισμα.

Έχουμε

$$S_{26} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}_{S_{10}} + \underbrace{a_{11} + \dots + a_{26}}_S = S_{10} + S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = S_{26} - S_{10} \Leftrightarrow S = \frac{[2a_1 + (26-1)\omega] \cdot 26}{2} - \frac{[2a_1 + (10-1)\omega] \cdot 10}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{[2(-7) + 25 \cdot 2] \cdot 26}{2} - \frac{[2(-7) + 9 \cdot 2] \cdot 10}{2} = \dots = 448$$



Παράδειγμα 4

Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων ΑΠ $1, 3, 5, 7, \dots$ που απαιτούνται ώστε το άθροισμα τους να ξεπερνά τον αριθμό 4000.

Λύση

Είναι φανερό ότι για την πρόοδο ισχύει $a_1 = 1, \omega = 2$

Ζητάμε να βρούμε την μικρότερη τιμή n ώστε να ισχύει

$$S_n > 4000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{[2 \cdot a_1 + (n-1)\omega]}{2} \cdot n > 4000 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot 1 + (n-1)2]}{2} \cdot n > 4000 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \cdot (2 + 2n - 2) > 4000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 > 4000 \Leftrightarrow n > \sqrt{4000} \Leftrightarrow n > 63,2$$

Άρα $n=64$.