ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σε ορισμένες ασκήσεις δίνεται το **άθροισμα** και το **γινόμενο** τριών ή τεσσάρων ή πέντε , κ.λ.π. **διαδοχικών ορών** μιας αριθμητικής προόδου και ζητείται να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Η λύση τέτοιου είδους ασκήσεων απαιτείται να ορισθούν οι διαδοχικοί όροι με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

α. Όταν δίνεται περιττό πλήθος διαδοχικών όρων (3,5,...) υπάρχει πάντα ένας

"μεσαίος όρος".

Αν έχουμε π.χ. 5 όρους τους συμβολίζουμε :

Α.Π.

$\alpha-2\omega \quad \alpha-\omega \quad \alpha \quad \alpha+\omega \quad \alpha+2\omega$

όπου ω είναι η διαφορά της προόδου

β. Όταν μας δίνεται άρτιο πλήθος διαδοχικών όρων (4,6,...) υπάρχουν δύο **"μεσαίοι όροι"**.

Αν έχουμε π.χ. 4 όρους τους συμβολίζουμε :

Α.Π.

$\alpha-3\omega \quad \alpha-\omega \quad \alpha+\omega \quad \alpha+3\omega$

όπου: $(\alpha+\omega)-(\alpha-\omega)=\alpha+\omega-\alpha+\omega=2\omega$

η διαφορά της προόδου

2. Όταν δίνεται ο γενικός όρος (α_ν) **μιας ακολουθίας** και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι αριθμητική πρόοδος, πρέπει να δείξουμε ότι η διαφορά : $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ είναι σταθερή.

Παράδειγμα 1

Αν ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=12-4\nu$, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος

Πράγματι :

$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=[12-4(\omega+1)]-(12-4\nu)=12-4\nu-4-12+4\nu= -4$

Άρα (α_ν) είναι Α.Π. με διαφορά $\omega=-4$ και πρώτο όρο $\alpha_1=12-4\cdot1=8$.

3. Όταν δίνεται το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων $(\nu\in N^*)$ μιας ακολουθίας (α_ν) και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος εργαζόμαστε ως εξής :

Το $S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu$ (1) και $S_{\nu-1}=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1}$ (2)

Αφαιρούμε από την (1) την (2) και έχουμε $S_\nu-S_{\nu-1}=\alpha_\nu$ άρα έχουμε έτσι τον ν-οστό όρο της ακολουθίας (α_ν).

Κατόπιν, εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση (2) για να δείξουμε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.

Παράδειγμα 2 Αν για κάθε $\nu\in N^*$ το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) δίνεται

από τον τύπο $S_\nu=\frac{1}{4}\nu^2-\nu$, **τότε** :

$$\alpha_\nu=S_\nu-S_{\nu-1}=\left(\frac{1}{4}\nu^2-\nu\right)-\left[\frac{1}{4}(\nu-1)^2-(\nu-1)\right]=$$
$$\frac{1}{4}\nu^2-\nu-\left[\frac{1}{4}(\nu^2-2\nu+1)-\nu+1\right]=\frac{1}{4}\nu^2-\nu-\frac{1}{4}\nu^2+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}+\nu-1=$$
$$-\frac{1}{2}\nu-\frac{5}{4}\Leftrightarrow\alpha_\nu=-\frac{1}{2}\nu-\frac{5}{4}$$

που είναι ο ν-οστός όρος της ακολουθίας και

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \left[-\frac{1}{2}(\nu+1) - \frac{5}{4}\right] - \left(\frac{1}{2}\nu - \frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\nu + \frac{5}{4} = -\frac{1}{2},$$

σταθερή

Άρα είναι αριθμητική πρόοδος.

Παράδειγμα 3

Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω ισχύει $a_7 + a_{17} = 30 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; a_9 + a_{20} = 40$. Να βρεθεί το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του $10^{ου}$ και $27^{ου}$ όρου.

Λύση

Αν θυμηθούμε τον γενικό όρο μιας ΑΠ που είναι $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε με αντικατάσταση :

$$\begin{cases} a_7 + a_{17} = 30 \\ a_9 + a_{20} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 6\omega + a_1 + 16\omega = 30 \\ a_1 + 8\omega + a_1 + 19\omega = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 22\omega = 30 & (1) \\ 2a_1 + 27\omega = 40 & (2) \end{cases}$$

Με αφαίρεση (2) – (1) έχουμε :

5ω=10 δηλαδή ω=2 και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε

$$2\alpha_1 + 22.2 = 30 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = 30 - 44 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -14 \Leftrightarrow \alpha_1 = -7$$

Έστω $S = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{26}$ το ζητούμενο άθροισμα.

Έχουμε

$$S_{26}=\underbrace{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}_{S_{10}}+\underbrace{a_{11}+\ldots+a_{26}}_{S}=S_{10}+S\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S=S_{26}-S_{10}\Leftrightarrow S=\frac{[2a_1+(26-1)\omega].26}{2}-\frac{[2a_1+(10-1)\omega].10}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{\left[2\left(-7\right)+25.2\right].26}{2}-\frac{\left[2\left(-7\right)+9.2\right].10}{2}=\ldots=448$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων ΑΠ 1,3,5,7,… που απαιτούνται ώστε το άθροισμα τους να ξεπερνά τον αριθμό 4000.

Λύση

Είναι φανερό ότι για την πρόοδο ισχύει $\alpha_1=1,\omega=2$

Ζητάμε να βρούμε την μικρότερη τιμή ν ώστε να ισχύει

$$S_\nu>4000\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left[2.a_1+\left(\nu-1\right)\omega\right]}{2}.\nu>4000\Leftrightarrow\frac{\left[2.1+\left(\nu-1\right)2\right]}{2}.\nu>4000\Leftrightarrow\frac{\nu}{2}.\left(\cancel{2}+2\nu-\cancel{2}\right)>4000\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nu^2>4000\Leftrightarrow\nu>\sqrt{4000}\Leftrightarrow\nu>63,2$$

Άρα ν=64.