

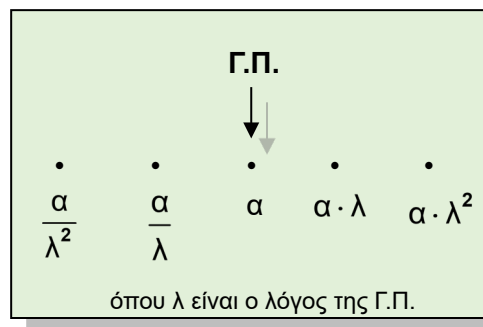


ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σε ορισμένες ασκήσεις δίνεται το **άθροισμα** και το **γινόμενο** τριών ή τεσσάρων ή πέντε, κ.λ.π. **διαδοχικών όρων** μιας γεωμετρικής προόδου και ζητείται να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Η λύση τέτοιου είδους ασκήσεων απαιτείται να ορισθούν οι διαδοχικοί όροι με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

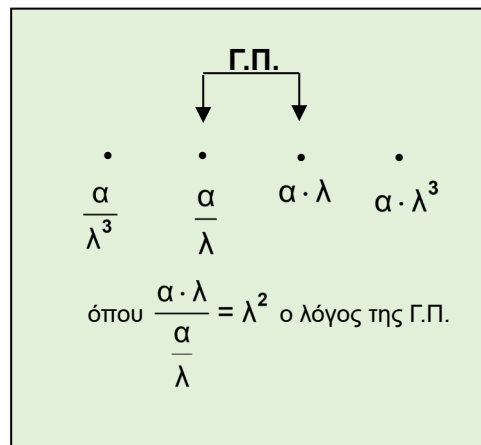
α. Όταν δίνεται **περιττό πλήθος** διαδοχικών όρων (3,5,...) υπάρχει πάντα ένας **"μεσαίος όρος"**.

Αν έχουμε π.χ. 5 όρους τους συμβολίζουμε ως εξής :



β. Όταν μας δίνεται **άρτιο πλήθος** διαδοχικών όρων (4,6,...) υπάρχουν δύο **"μεσαίοι όροι"**.

Αν έχουμε π.χ. 4 όρους τους συμβολίζουμε ως εξής :



2. Όταν δίνεται ο γενικός όρος (α_n) **μιας ακολουθίας** και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι αριθμητική πρόοδος, πρέπει να δείξουμε ότι η διαφορά : $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \text{σταθερό}$.



Παράδειγμα 1 Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 2^n \frac{1}{3^{n+1}}$, να δείξετε ότι είναι γεωμετρική

πρόοδος.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \frac{1}{3^{n+2}}}{2^n \frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2}{3}$$

Άρα $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}$ και η a_n είναι Γ.Π. με λόγο $\frac{2}{3}$ και πρώτο όρο $a_1 = 2^1 \frac{1}{3^{1+1}} = 2 \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9}$.

3. Όταν δίνεται το άθροισμα S_n των πρώτων n όρων ($n \in \mathbb{N}^*$) μιας ακολουθίας (a_n) και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι γεωμετρική πρόοδος γράφουμε τα αθροίσματα :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1) \quad \text{και} \quad S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad (2)$$

Αφαιρούμε από την (1) την (2) κατά μέλη και έχουμε $S_n - S_{n-1} = a_n$ άρα έχουμε έτσι τον

n -οστό όρο της ακολουθίας (a_n).

Κατόπιν, εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση (2) για να δείξουμε ότι

είναι γεωμετρική πρόοδος.



Παράδειγμα 2 Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι

$$S_n = 2^n - 1 \text{ να δείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος.}$$

Λύση

Έχουμε ότι :

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = (2 - 1)2^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2^{n-1} \text{ είναι ο } n\text{-οστός όρος της ακολουθίας}$$

Έχουμε :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)-1}}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2 \Leftrightarrow a_{n+1} = 2a_n$$

Άρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\lambda=2$ και $a_1=2^{1-1}=1$.



Παράδειγμα 3 Έστω ΓΠ $3, 6, 12, \dots$ Να βρεθεί το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

Λύση

Προφανώς ισχύει $a_1 = 3, \lambda = 2$. Ζητάμε το n ώστε $a_n = 768$.

Επομένως θα ισχύει

$$\begin{aligned} a_n = 768 &\Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^{n-1} = 768 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Leftrightarrow n-1 = 8 \Leftrightarrow n = 9 \end{aligned}$$



Παράδειγμα 4 Να βρεθεί ο πρώτος όρος της ΓΠ $128, 64, 32, \dots$

που είναι μικρότερος του 0,25

Λύση

Προφανώς ισχύει $a_1 = 128, \lambda = \frac{1}{2}$. Ζητάμε το n ώστε $a_n < 0,25$.

Επομένως θα ισχύει

$$\begin{aligned} a_n < 0,25 &\Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^{n-1} < 0,25 \Leftrightarrow 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0,25 \Leftrightarrow 2^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{25}{100} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^7 \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{7-n+1} < 2^{-2} \Leftrightarrow -n + 8 < -2 \Leftrightarrow n > 10 \end{aligned}$$

Άρα $n > 10$, δηλαδή ο ζητούμενος είναι ο ο 11^{ος} όρος.



Παράδειγμα 5 Δίνεται ΓΠ (a_n της οποίας το άθροισμα των πρώτων 16 όρων είναι 30000 και ισχύει $\lambda = 3a_1 - 1$). Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2$

Λύση

Προφανώς ισχύει $S_{16} = 30000 \Leftrightarrow a_1 \frac{\lambda^{16} - 1}{\lambda - 1} = 30000$ (1). Οι αριθμοί $a_1^2, a_2^2, \dots, a_8^2$ είναι οι 8 πρώτοι όροι ΓΠ με πρώτο όρο a_1^2 και λόγο λ^2

Άρα το άθροισμα τους είναι

$$\begin{aligned} S &= a_1^2 \cdot \frac{(\lambda^2)^8 - 1}{\lambda^2 - 1} = a_1^2 \cdot \frac{\lambda^{16} - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{a_1}{\lambda + 1} \cdot \frac{a_1(\lambda^{16} - 1)}{(\lambda - 1)} \quad \stackrel{\text{λόγους σχέσης (1)}}{=} \\ &= \frac{a_1}{\lambda + 1} 30000 = \frac{a_1}{(3a_1 - 1) + 1} 30000 = 10000 \end{aligned}$$