ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σε ορισμένες ασκήσεις δίνεται το **άθροισμα** και το **γινόμενο** τριών ή τεσσάρων ή πέντε , κ.λ.π. **διαδοχικών ορών** μιας γεωμετρικής προόδου και ζητείται να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Η λύση τέτοιου είδους ασκήσεων απαιτείται να ορισθούν οι διαδοχικοί όροι με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

α. Όταν δίνεται περιττό πλήθος διαδοχικών όρων (3,5,...) υπάρχει πάντα ένας **"μεσαίος όρος"**.

Αν έχουμε π.χ. 5 όρους τους συμβολίζουμε ως εξής :

Γ.Π.

$$\frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \alpha \qquad \alpha\cdot\lambda \qquad \alpha\cdot\lambda^2$$

όπου λ είναι ο λόγος της Γ.Π.

β. Όταν μας δίνεται άρτιο πλήθος διαδοχικών όρων (4,6,...) υπάρχουν δύο **"μεσαίοι όροι"**.

Αν έχουμε π.χ. 4 όρους τους συμβολίζουμε ως εξής :

Γ.Π.

$$\frac{\alpha}{\lambda^3} \qquad \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \alpha\cdot\lambda \qquad \alpha\cdot\lambda^3$$

όπου $\dfrac{\alpha\cdot\lambda}{\frac{\alpha}{\lambda}} = \lambda^2$ ο λόγος της Γ.Π.

2. Όταν δίνεται ο γενικός όρος (α_ν) **μιας ακολουθίας** και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι αριθμητική πρόοδος, πρέπει να δείξουμε ότι η διαφορά : $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = $ σταθερό.

Παράδειγμα 1 Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=2^\nu\frac{1}{3^{\nu+1}}$, να δείξετε ότι είναι γεωμετρική

πρόοδος.

Λύση

Έχουμε $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{2^{\nu+1}\frac{1}{3^{\nu+2}}}{2^\nu\frac{1}{3^{\nu+1}}}=\frac{2\cdot 3^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}=\frac{2}{3}$

Άρα $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{2}{3}$ και η α_ν είναι Γ.Π. με λόγο $\frac{2}{3}$ και πρώτο όρο $\alpha_1=$ $2^1\frac{1}{3^{1+1}}=2\frac{1}{3^2}=\frac{2}{9}$.

3. Όταν δίνεται το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων ($\nu\in N^*$) μιας ακολουθίας (α_ν) και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι γεωμετρική πρόοδος γράφουμε τα αθροίσματα :

$S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu$ (1) και $S_{\nu-1}=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1}$ (2)

Αφαιρούμε από την (1) την (2) κατά μέλη και έχουμε $S_\nu-S_{\nu-1}=\alpha_\nu$ άρα έχουμε έτσι τον

ν-οστό όρο της ακολουθίας (α_ν).

Κατόπιν, εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση (2) για να δείξουμε ότι

είναι γεωμετρική πρόοδος.

Παράδειγμα 2 Αν για κάθε $\nu \in N^*$ το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$S_\nu = 2^\nu - 1$ να δείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος.

Λύση

Έχουμε ότι :

$\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} = (2^\nu - 1) - (2^{\nu-1} - 1) = 2^\nu - 1 - 2^{\nu-1} + 1 = (2-1)2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}$ είναι ο ν-οστός όρος της ακολουθίας

Έχουμε :

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{(\nu+1)-1}}{2^{\nu-1}} = \frac{2^\nu}{2^{\nu-1}} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$$

Άρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\lambda=2$ και $\alpha_1=2^{1-1}=1$.

Παράδειγμα 3 Έστω ΓΠ 3,6,12,… Να βρεθεί το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

Λύση

Προφανώς ισχύει $a_1 = 3, \lambda = 2$. Ζητάμε το ν ώστε $a_\nu = 768$. Επομένως θα ισχύει

$$a_\nu = 768 \Leftrightarrow \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 3.2^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^8 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$$

Παράδειγμα 4 Να βρεθεί ο πρώτος όρος της ΓΠ 128,64,32,…

που είναι μικρότερος του 0,25

Λύση

Προφανώς ισχύει $a_1 = 128, \lambda = \frac{1}{2}$. Ζητάμε το ν ώστε $a_\nu < 0,25$.
Επομένως θα ισχύει

$$a_\nu < 0,25 \Leftrightarrow \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} < 0,25 \Leftrightarrow 128.\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} < 0,25 \Leftrightarrow 2^7.\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} < \frac{25}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^7 \frac{1}{2^{\nu-1}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{7-\nu+1} < 2^{-2} \Leftrightarrow -\nu + 8 < -2 \Leftrightarrow \nu > 10$$

Άρα ν>10, δηλαδή ο ζητούμενος είναι ο ο 11^ος όρος.

Παράδειγμα 5 Δίνεται ΓΠ $(\alpha_\nu$ της οποίας το άθροισμα των πρώτων 16 όρων είναι 30000 και ισχύει $\lambda = 3\alpha_1 - 1$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_8^2$

Λύση

Προφανώς ισχύει $S_{16} = 30000 \Leftrightarrow a_1 \frac{\lambda^{16} - 1}{\lambda - 1} = 30000 \quad (1)$. Οι αριθμοί $\alpha_1^2, \alpha_2^2, ..., \alpha_8^2$ είναι οι 8 πρώτοι όροι ΓΠ με πρώτο όρο α_1^2 και λόγο λ^2

Άρα το άθροισμα τους είναι

$$S = \alpha_1^2 . \frac{\left(\lambda^2\right)^8 - 1}{\lambda^2 - 1} = \alpha_1^2 . \frac{\lambda^{16} - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{a_1}{\lambda + 1} \frac{a_1\left(\lambda^{16} - 1\right)}{(\lambda - 1)} \underbrace{=}_{\text{λόγω της σχέσης } (1)}$$

$$= \frac{a_1}{\lambda + 1} 30000 = \frac{a_1}{(3\alpha_1 - 1) + 1} 30000 = 10000$$