Μέθοδοι απόδειξης ταυτοτήτων

Αν θέλουμε να αποδείξουμε μια ταυτότητα χρησιμοποιούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους :

1ος τρόπος

Παίρνουμε το πιο σύνθετο μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς καταλήγουμε στο άλλο μέλος, (όταν λέμε μετασχηματισμούς εννοούμε: τις πράξεις, την παραγοντοποίηση, την εφαρμογή ταυτοτήτων κ.λ.π.).

2ος τρόπος

Αν και τα δύο μέλη είναι πολύπλοκα, τότε παίρνουμε το 1ο μέλος κάνουμε μετασχηματισμούς και καταλήγουμε σε μια παράσταση Α.
Μετά παίρνουμε το 2ο μέλος κάνουμε μετασχηματισμούς και καταλήγουμε σε μια παράσταση Β.
Αν Α = Β, τότε η ισότητα ισχύει.

3ος τρόπος

Παίρνουμε την ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και με ισοδυναμίες, αφού κάνουμε μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε μια ισότητα , η οποία :

- ή είναι προφανής από θεωρία
- ή ισχύει από υπόθεση.

Η ταυτότητα των τριών κύβων

$$a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma=\frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)\left[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

Συνέπεια της ταυτότητας των τριών κύβων

$$\text{Αν}\quad a+\beta+\gamma=0\quad \text{τότε}\quad a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma$$

$$\text{Αν}\quad a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma\quad \text{τότε}\quad a+\beta+\gamma=0\quad \text{ή}\quad a=\beta=\gamma$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Όταν σε μια ταυτότητα εμφανίζεται ένα άθροισμα τριών κύβων, θα ελέγχουμε μήπως εφαρμόζεται η πρόταση

$$\text{Αν} \quad a+\beta+\gamma=0 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma$$

Εφαρμογή

Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$(2x+5y)^3+(3x-7y)^3+(2y-5x)^3=3(2x+5y)(3x-7y)(2y-5x)$

Λύση

Αν θέσουμε $a=2x+5y,\ \ \beta=3x-7y,\ \ \gamma=2y-5x$, τότε θα παρατηρήσουμε ότι :

$a+\beta+\ \gamma=2x+5y+3x-7y+2y-5x=2x+3x-5x+5y-7y+2y=0$

Επειδή ισχύει **α+β+γ=0** , θα ισχύει επίσης :

$a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+5y)^3+(3x-7y)^3+(2y-5x)^3=3(2x+5y)(3x-7y)(2y-5x)$

Μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο

Μπορούμε να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ως εξής :

Υποθέτουμε ότι ο **ισχυρισμός** που θέλουμε να αποδείξουμε **δεν ισχύει**. Χρησιμοποιώντας **σωστούς συλλογισμούς** καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε **αντίθεση** με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει.

Καταλήγουμε δηλαδή σε **ΑΤΟΠΟ**.

Άρα ο ζητούμενος ισχυρισμός –που υποθέσαμε ότι δεν ισχύει--- είναι τελικά σωστός.

Εφαρμογή

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α. Αν ο αριθμός a^2+2a είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο α είναι άρτιος.

Λύση

Μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι α είναι άρτιος. Υποθέτουμε ότι **δεν ισχύει** αυτό. Άρα ο αριθμός α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει την μορφή $a = 2\nu + 1$, όπου ν θετικός ακέραιος.

Με κατάλληλους συλλογισμούς έχουμε:

$$a^2 + 2a = (2\nu+1)^2 + 2(2\nu+1) = 4\nu^2 + 4\nu + 1 + 4\nu + 2 = 4\nu^2 + 4\nu + 4\nu + 2 + 1 =$$

$$= 2(2\nu^2 + 4\nu + 1) + 1 = 2\rho + 1, \quad \text{όπου}$$

$\rho = 2\nu^2 + 4\nu + 1$ ακέραιος. Δηλαδή ΑΠΟΔΕΙΞΑΜΕ ότι ο αριθμός $a^2 + 2a$ θα είχε την μορφή ενός περιττού αριθμού. Αυτό όμως είναι ΑΤΟΠΟ γιατί $a^2 + 2a$ μας δόθηκε άρτιος. Άρα ήταν ΛΑΘΟΣ να υποθέσουμε α περιττός, άρα και ο α είναι άρτιος.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν είναι πάντα αληθής, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο ισχυρισμός αυτός δεν ισχύει. Αρκεί δηλαδή να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός «για κάθε α>0 ισχύει ότι $a^3 > a^2$» δεν είναι αληθής

Λύση

Για $a = \frac{1}{2}$ είναι $a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $\quad a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ δηλαδή $a^3 \not> a^2$