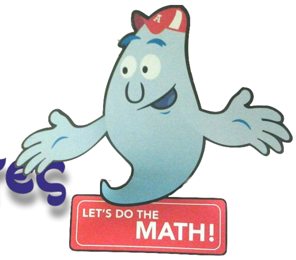
Πράξεις και ιδιότητες



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

•Αριθμοί

- **Φυσικοί** αριθμοί είναι οι αριθμοί : 0, 1, 2, 3,...
  και αποτελούν το σύνολο των φυσικών αριθμών που συμβολίζεται με N.

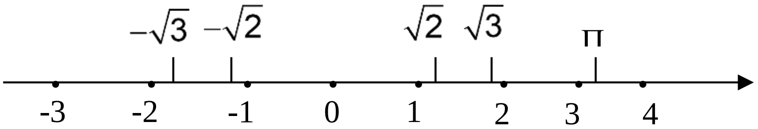
- **Ακέραιοι** αριθμοί είναι οι αριθμοί : ... -2,-1,0,1,2, ...
  και αποτελούν το σύνολο των ακέραιων αριθμών που συμβολίζεται με Z.

Ρητοί αριθμοί είναι αυτοί που έχουν (ή μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ και αποτελούν το σύνολο των ρητών αριθμών που συμβολίζεται με Q.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός. Μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

- **Άρρητοι** αριθμοί είναι αυτοί που **δεν είναι ρητοί.**

- **Πραγματικοί** αριθμοί είναι αυτοί που είναι ρητοί ή άρρητοι και αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών που συμβολίζεται με R.



- Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

- Με $\mathbb{N}^*$ συμβολίζουμε το σύνολο που αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς εκτός του 0, δηλαδή, τους αριθμούς :
  1, 2 , 3, ...

  Ίδιος είναι ο συμβολισμός για : $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$

- Το σύνολο των θετικών ακέραιων είναι το σύνολο $\mathbb{N}^*$.

- **Άρτιοι** ακέραιοι είναι το πολλαπλάσια του 2.

> Ένας ακέραιος α είναι **άρτιος** όταν έχει τη μορφή
>
> $$\boldsymbol{\alpha = 2\kappa\ , \quad \kappa \in Z}$$

- **Περιττοί** ακέραιοι είναι οι ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 .
  Δηλαδή οι αριθμοί : ..., -3, -1, 1, 3, ...

> Ένας ακέραιος α είναι **περιττός** όταν έχει τη μορφή
>
> $$\boldsymbol{\alpha = 2\kappa+1\ , \quad \kappa \in Z}$$

- Αν οι αριθμοί α, β, γ, με τη σειρά που δίνονται είναι :

i. Διαδοχικοί ακέραιοι, τότε γράφονται :

- $\beta = \alpha + 1,\ \gamma = \alpha + 2$
- $\alpha = \beta - 1,\ \gamma = \beta + 1$
- $\beta - \alpha = \gamma - \beta = 1$

ii. Διαδοχικοί άρτιοι ή *περιττοί*, τότε γράφονται :

- $\beta = \alpha + 2,\ \gamma = \alpha + 4$
- $\alpha = \beta - 2,\ \gamma = \beta + 2$
- $\beta - \alpha = \gamma - \beta = 2$

- **Πράξεις**

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύουν οι **ιδιότητες** που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος - Αντίστροφος αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1,\ \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

- Οι αριθμοί α, β λέγονται **αντίθετοι**, όταν έχουν άθροισμα μηδέν. Δηλαδή $α + β = 0$

  - Ο αντίθετος του α είναι ο $-α$.
  - Ο αντίθετος του 0 είναι το 0.

- Οι αριθμοί α, β λέγονται **αντίστροφοι** , όταν έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα. Δηλαδή $α \cdot β = 1$

  - Αν $α \neq 0$, τότε ο αντίστροφος του αριθμού α είναι ο $\frac{1}{α}$.
  - Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

- Η **αφαίρεση** και η **διαίρεση** ορίζονται με την βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως, ως εξής :

  - $α – β = α + (-β)$
  - $α : β = \frac{α}{β} = α \cdot \frac{1}{β}$, $β \neq 0$

- Για τις **πράξεις** ισχύουν οι **ιδιότητες** :

1. $\begin{cases} α = β \\ γ = δ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} α + γ = β + δ \\ αγ = βδ \end{cases}$

2. • $α = β \Leftrightarrow α + γ = β + γ$

• $α = β \Rightarrow αγ = βγ$

• Αν $γ \neq 0$, τότε

$αγ = βγ \Leftrightarrow α = β$

3. • $α \cdot 0 = 0$ • $\frac{0}{α} = 0$, $α \neq 0$

4. • $αβ = 0 \Leftrightarrow α = 0$ ή $β = 0$

➤ **Ιδιότητες των αναλογιών**

1. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma,\qquad \beta\delta\neq 0$

2. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta},\qquad \beta\gamma\delta\neq 0$

3. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta},\qquad \beta\delta\neq 0$

4. Αν
$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},\qquad \beta\delta(\beta+\delta)\neq 0$