Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την **εξίσωση** της μορφής

$$(x-2)^2=9$$

Μπορούμε να την λύσουμε εύκολα ως εξής:

$$(x-2)^2=9 \quad άρα \quad x-2=\begin{cases}\sqrt{9}\\ ή\\ -\sqrt{9}\end{cases} \quad άρα \quad x-2=\begin{cases}3\\ ή\\ -3\end{cases} \quad άρα \quad \begin{cases}x-2=3\\ ή\\ x-2=-3\end{cases} \quad άρα \quad \begin{cases}x=5\\ ή\\ x=-1\end{cases}$$

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα:

$$(x+2)^2=10$$

Με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε:

$$(x+2)^2=10 \quad άρα \quad x+2=\begin{cases}\sqrt{10}\\ ή\\ -\sqrt{10}\end{cases} \quad άρα \quad \begin{cases}x+2=\sqrt{10}\\ ή\\ x+2=-\sqrt{10}\end{cases} \quad άρα \quad \begin{cases}x=-2+\sqrt{10}\\ ή\\ x=-2-\sqrt{10}\end{cases}$$

Η αλήθεια είναι ότι δεν μας τυχαίνουν πάντα τέτοιες "***στρωμένες***" μορφές.

Εδώ θα αναπτύξουμε την μέθοδο της **συμπλήρωσης τετραγώνου,**

η οποία θα μας **βοηθήσει** να **επιλύουμε** εξισώσεις **δευτέρου βαθμού**, χρησιμοποιώντας την

ταυτότητα του τετραγώνου αθροίσματος.

Ο στόχος της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου είναι να μετατρέψουμε μια δευτεροβάθμια έκφραση σε αντίστοιχη, η οποία να περιέχει **ένα τέλειο τετράγωνο**. Ας θυμηθούμε τις ταυτότητες

Συμπλήρωση τετραγώνου

1
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ x ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΟΣ

Να συμπληρωθεί σε τετράγωνο η **δευτεροβάθμια έκφραση**

$$x^2 + 8x$$

Λύση

Για να συμπληρωθεί η έκφραση, ώστε να προκύψει τέλειο τετράγωνο πρέπει αρχικά **να διαμορφώσουμε κατάλληλα** τους δεδομένους όρους. Έχουμε λοιπόν:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4$$

Είναι φανερό ότι μας λείπει **ο σταθερός όρος που θα συμπληρώσει την ταυτότητα**.

Από το διπλάσιο γινόμενο διαπιστώνουμε ότι ο δεύτερος όρος του αθροίσματος είναι ο **4**, οπότε:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x+4)^2$$

δηλαδή **συμπληρώθηκε το τετράγωνο**.

2
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ x ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΤΤΟΣ

Να συμπληρωθεί σε τετράγωνο **η δευτεροβάθμια έκφραση**

$$x^2 + 3x$$

Λύση

Για να συμπληρωθεί η έκφραση, ώστε να προκύψει τέλειο τετράγωνο πρέπει αρχικά **<u>να διαμορφώσουμε κατάλληλα</u>** τους δεδομένους όρους. Έχουμε λοιπόν:

Πολλαπλασιάζουμε τα πάντα με 4

$$4x^2+12x=0$$

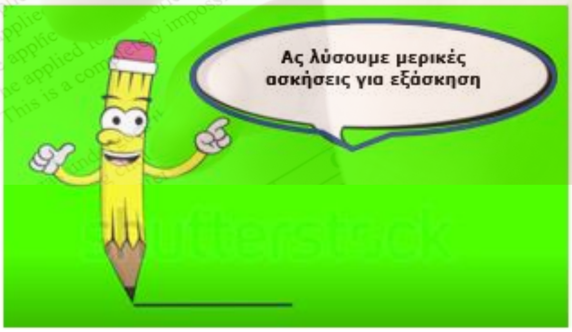
$$(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot3=0$$

Είναι φανερό ότι μας λείπει **ο σταθερός όρος που θα συμπληρώσει την ταυτότητα**.

Από το διπλάσιο γινόμενο διαπιστώνουμε ότι ο δεύτερος όρος του αθροίσματος είναι ο 3, οπότε:

$$(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot3+3^2=(2x+3)^2$$

δηλαδή **συμπληρώθηκε το τετράγωνο**.



ΑΣΚΗΣΗ Να συμπληρώσετε τις επόμενες **δευτεροβάθμιες παραστάσεις**, ώστε να γίνουν τέλεια τετράγωνα (**συμπλήρωση τετραγώνων**):

$$i)\quad x^2-10x\quad ii)\quad x^2+6x\quad iii)\quad x^2+7x\quad iv)\quad x^2-5x$$

Ας εφαρμόσουμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου στην επίλυση μια εξίσωσης 2ου βαθμού.

Όταν έχουμε να **λύσουμε μια εξίσωση**, με την μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, ας έχουμε κατά νου, ότι **όποιες αλλαγές πραγματοποιούμε να μην καταστρέφεται η ισότητα**. πρέπει, όπως λέμε, να προκύπτει **ισοδύναμη εξίσωση**

Α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+8x+15=0$

$x^2+2\cdot 4\cdot x+15=0$	Εμφανίζουμε το διπλάσιο γινόμενο.
$x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2-4^2+15=0$	Προσθέτουμε **και αφαιρούμε** το 4^2 ώστε να **ΜΗΝ ΑΛΛΑΖΕΙ** ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$(x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2)-4^2+15=0$	Έτσι δημιουργείται τέλειο τετράγωνο $a^2+2a\beta+\beta^2=(a+\beta)^2$
$(x+4)^2-4^2+15=0$	Πράξεις
$(x+4)^2=4^2-15$	Πράξεις
$(x+4)^2=1$	Αποτετραγωνίζω και τα δύο μέλη.

Τελικά δηλαδή θα έχουμε:

$$(x+4)^2=1 \quad ά\rho\alpha \quad x+4=\begin{cases}\sqrt{1}\\ ή\\ -\sqrt{1}\end{cases} \quad ά\rho\alpha \quad x+4=\begin{cases}1\\ ή\\ -1\end{cases} \quad ά\rho\alpha \quad \begin{cases}x+4=1\\ ή\\ x+4=-1\end{cases} \quad ά\rho\alpha \quad \begin{cases}x=-3\\ ή\\ x=-5\end{cases}$$

Β. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+5x-6=0$

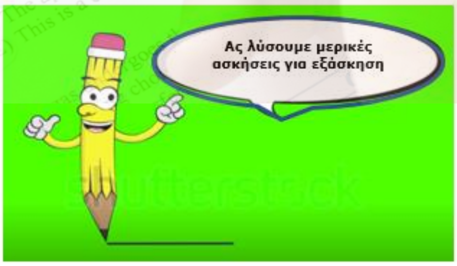
$4\cdot x^2+4\cdot 5\cdot x-4\cdot 6=0$	Πολλαπλασιάζουμε τα πάντα επι 4
$4\cdot x^2+20\cdot x-24=0$	Προσοχή πως γράφουμε τον όρο $4x^2$ κάτω από 2η δύναμη

$(2\cdot x)^2+20\cdot x-24=0$	$4x^2=(2x)^2$
$(2\cdot x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5-24=0$	Εμφανίζουμε το διπλάσιο γινόμενο.
$(2\cdot x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5+5^2-5^2-24=0$	Προσθέτουμε **και αφαιρούμε** το 5^2 ώστε να **ΜΗΝ ΑΛΛΑΖΕΙ** ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$\left[(2\cdot x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5+5^2\right]-5^2-24=0$	Έτσι δημιουργείται τέλειο τετράγωνο $a^2+2a\beta+\beta^2=(a+\beta)^2$
$(2\cdot x+5)^2-5^2-24=0$	Πράξεις
$(2\cdot x+5)^2=5^2+24$	Πράξεις
$(2\cdot x+5)^2=49$	Αποτετραγωνίζω και τα δύο μέλη.

Τελικά θα έχουμε:

$$(2x+5)^2=49 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad 2x+5=\begin{cases}\sqrt{49}\\ \acute{\eta}\\ -\sqrt{49}\end{cases} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad 2x+5=\begin{cases}7\\ \acute{\eta}\\ -7\end{cases} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \begin{cases}2x+5=7\\ \acute{\eta}\\ 2x+5=-7\end{cases}$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \begin{cases}2x=-2\\ \acute{\eta}\\ 2x=-12\end{cases} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \begin{cases}x=-1\\ \acute{\eta}\\ x=-6\end{cases}$$



ΑΣΚΗΣΗ Να λυθούν οι επόμενες **δευτεροβάθμιες εξισώσεις** με αυτή τη μέθοδο (**συμπλήρωση τετραγώνων**):

$i)\quad x^2-10x+21=0 \quad ii)\quad x^2+6x+8=0 \quad iii)\quad x^2-7x+10=0 \quad iv)\quad x^2-5x-6=0$

Θα λύσουμε τώρα τη γενική περίπτωση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$a\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma=0$$

$4a\cdot a\cdot x^2+4a\cdot\beta\cdot x+4a\cdot\gamma=0$	Πολλαπλασιάζουμε τα πάντα επι $4a$
$4a^2\cdot x^2+4a\cdot\beta\cdot x+4a\cdot\gamma=0$	Προσοχή πως γράφουμε τον όρο $4a^2x^2$ κάτω από 2η δύναμη
$(2ax)^2+4\cdot a\beta x+4a\cdot\gamma=0$	$4a^2x^2=(2ax)^2$
$(2ax)^2+2\cdot 2ax\beta+4a\cdot\gamma=0$	Εμφανίζουμε το διπλάσιο γινόμενο.
$(2ax)^2+2\cdot 2ax\beta+\beta^2-\beta^2+4a\cdot\gamma=0$	Προσθέτουμε **και αφαιρούμε** το β^2 ώστε να **ΜΗΝ ΑΛΛΑΖΕΙ** ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$\left[(2ax)^2+2\cdot 2ax\beta+\beta^2\right]-\beta^2+4a\cdot\gamma=0$	Έτσι δημιουργείται <u>τέλειο</u> τετράγωνο $a^2+2a\beta+\beta^2=(a+\beta)^2$
$(2ax+\beta)^2-\beta^2+4a\cdot\gamma=0$	Πράξεις
$(2ax+\beta)^2=\beta^2-4a\cdot\gamma$	Ονομάζουμε Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4a\cdot\gamma$
$(2ax+\beta)^2=\Delta$	Εφόσον η Διακρίνουσα είναι ΘΕΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ μπορούμε να ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΟΥΜΕ και έτσι να λύσουμε την γενική μορφή της εξίσωσης 2^ου^ βαθμού.

$$(2ax+\beta)^2=\Delta \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad 2ax+\beta=\begin{cases}\sqrt{\Delta}\\ \acute{\eta}\\ -\sqrt{\Delta}\end{cases} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \begin{cases}2ax+\beta=\sqrt{\Delta}\\ \acute{\eta}\\ 2ax+\beta=-\sqrt{\Delta}\end{cases} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \begin{cases}x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ \acute{\eta}\\ x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$