

1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

1) Για να πάρουμε τον αριθμό 8^8 , σε ποια δύναμη πρέπει να υψώσουμε τον 4^4 ;

A) στην 2 B) στην 3 Γ) στην 4 Δ) στην 8 Ε) στην 16

(Μονάδες 8)

2) Να βρείτε έναν αριθμό μεταξύ $1,73205080756$ και $1,73205080757$. Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ των δύο αυτών αριθμών;

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2^ο

Σκόπος μας είναι να υπολογίσουμε αλγεβρικές παραστάσεις με ριζικά.

Έστω $\alpha = \sqrt{181 + 52\sqrt{3}}$ και $\beta = \sqrt{181 - 52\sqrt{3}}$.

1. Δείξτε ότι οι αριθμοί α και β είναι καλά ορισμένοι.

(Μονάδες 5)

2. Υπολογίστε τα $(13 - 2\sqrt{3})^2$ και $(13 + 2\sqrt{3})^2$.

(Μονάδες 5)

3. Υπολογίστε το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

(Μονάδες 15)

4. Υπολογίστε την ακριβή τιμή του $\alpha + \beta$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

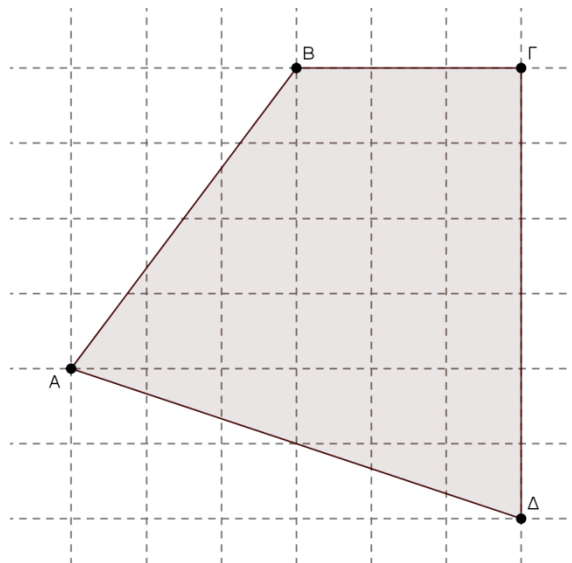
Στο παρακάτω σχέδιο βλέπουμε σε κλίμακα 1:500 το αποτύπωμα ενός οικοπέδου ΑΒΓΔ, όπου κάθε τετραγωνάκι του διπλανού σχεδίου έχει πλευρά 1cm.

α. Να υπολογίσετε το πραγματικό
εμβαδόν του οικοπέδου σε
τετραγωνικά μέτρα.

(Μονάδες 15)

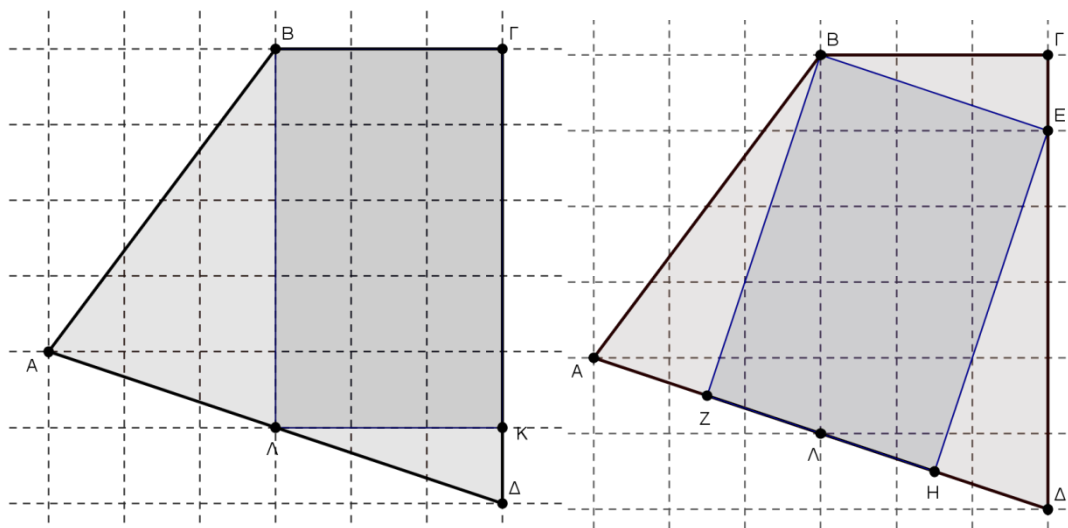
β. Να υπολογίσετε την πραγματική
περίμετρο του οικοπέδου σε μέτρα

(Μονάδες 10)



γ. Στο οικόπεδο θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κτίριο σε σχήμα ορθογωνίου.
Προτάθηκαν τα επόμενα δυο σχέδια ΒΓΚΛ και ΒΕΗΖ, όπου Λ το μέσο της ΑΔ.
Να συγκρίνετε τα εμβαδά τους.

(Μονάδες 15)



ΤΕΛΟΣ 1^{ου} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΟ 1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΜΕΤΡΙΟ

ΘΕΜΑ 1^ο (Βλάχος Αθανάσιος Πειραματικό Γυμνάσιο Ευαγγελικής Σχολής και Λυγάτσικας Ζ. Βαρβάκειο Λύκειο)

$$1. \quad 8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$$

$$4^4 = (2^2)^4 = 2^8$$

$$(2^8)^3 = 2^{24}$$

$$(4^4)^3 = 2^{24} = 8^8$$

Σωστό το Β

(8 μονάδες)

$$2. \quad \text{Ναι, ο μέσος αριθμητικός των δύο αριθμών : } \frac{1,73205080756 + 1,73205080757}{2}.$$

Ή ένας απο τους : 1,732050807561/2/3/4/5/6/7/8/9.

Γενικά υπάρχουν άπειροι τέτοιοι αριθμοί.

(10+2=12 μονάδες)

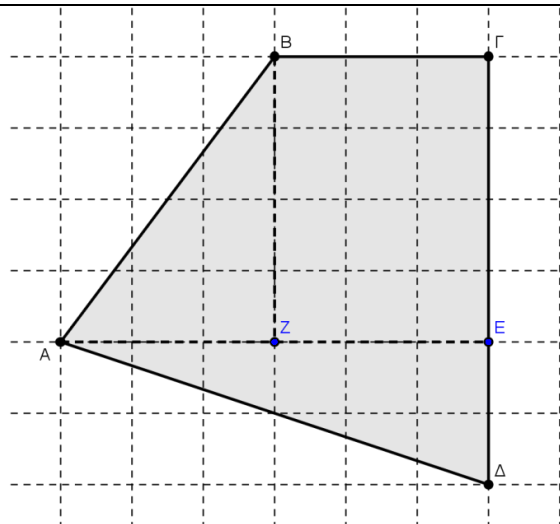
ΘΕΜΑ 2^ο (Λυγάτσικας Ζ. Βαρβάκειο Λύκειο)

1)	Για να είναι ο αριθμός α καλά ορισμένος πρέπει η υπόριζος ποσότητα να είναι θετική. Η ποσότητα αυτή σαν άθροισμα θετικών αριθμών είναι θετική.	2 μον.
	Για να είναι ο αριθμός β καλά ορισμένος πρέπει η υπόριζος ποσότητα να είναι θετική.	1 μον.
	$\begin{cases} 181 > 52\sqrt{3} \\ 181^2 > (52\sqrt{3})^2 \\ 32761 > 52^2 \cdot 3 \\ 32761 > 8112 \end{cases}$ <p>Πράγματι: Άρα $181 - 52\sqrt{3} > 0$.</p> <p>-----</p> <p>ή χρησιμοποιώντας το 1, $181 - 52\sqrt{3} = (13 - 2\sqrt{3})^2 > 0$ το οποίο είναι πάντα θετικό</p>	2 μον.
2)	$\begin{aligned} (13 - 2\sqrt{3})^2 &= 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 \\ &= 181 - 52\sqrt{3} \end{aligned}$	2,5 μον

	$(13+2\sqrt{3})^2 = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2$ $= 181 + 52\sqrt{3}$	2,5 μον.
3)	$\alpha^2 = (\sqrt{181+52\sqrt{3}})^2 = 181+52\sqrt{3}$ $\beta^2 = (\sqrt{181-52\sqrt{3}})^2 = 181-52\sqrt{3}$ $\alpha \cdot \beta = \sqrt{181+52\sqrt{3}} \sqrt{181-52\sqrt{3}}$ $= \sqrt{(181+52\sqrt{3})(181-52\sqrt{3})}$ $= \sqrt{181^2 - (52\sqrt{3})^2}$ $= \sqrt{32761 - 8112}$ $= \sqrt{24649}$ $= 157$ <hr/> <p>ή</p> $\alpha \cdot \beta = \sqrt{181+52\sqrt{3}} \sqrt{181-52\sqrt{3}}$ $= (13+2\sqrt{3})(13-2\sqrt{3})$ $= 13^2 - 2^2 \cdot 3$ $= 157$	2 μον. 2 μον. 2 μον. 2 μον. 2 μον. 6 μον.
4)	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ $= 181 + 52\sqrt{3} + 2 \cdot 157 + 181 - 52\sqrt{3}$ $= 676$ <p>$\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta > 0$, άρα:</p> $\alpha + \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2} = \sqrt{676} = 26$ <hr/> <p>ή $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta > 0$, άρα:</p> $\sqrt{(\alpha + \beta)^2} = \alpha + \beta = 13 + 2\sqrt{3} + 13 - 2\sqrt{3} = 26$	10 μον. 3 μον. 2 μον. 3 μον. 12 μον.

ΘΕΜΑ 3^ο (Γλένης Σπύρος Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών)

a)



Διαμερίζουμε το οικόπεδο σε δυο ορθογώνια τρίγωνα κι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδά:

(5 μονάδες)

$$(AZB) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6cm^2$$

(2 μονάδες)

$$(AED) = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6cm^2$$

(2 μονάδες)

$$(BGEZ) = 3 \cdot 4 = 12cm^2$$

(1 μονάδες)

$$\text{Επομένως } (AB\Gamma\Delta) = 6+6+12=24cm^2$$

(ΣΥΝΟΛΟ = 5 + 2 + 2 + 1 = 10 μον)

Επειδή το γράφημα είναι σε κλίμακα 1:500 τότε το πραγματικό σχήμα είναι 500 φορές μεγαλύτερο, οπότε το εμβαδόν είναι $500^2 = 250000$ φορές μεγαλύτερο.

$$\text{Το πραγματικό εμβαδόν είναι } 24 \cdot 250\,000 = 6.000.000cm^2$$

$$\text{Διαιρώντας με } 100^2 = 10.000 \text{ προκύπτει το εμβαδόν } E = 600m^2.$$

	(5 μονάδες)
b)	<p>Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΒ έχουμε</p> $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \quad (3 \text{ μονάδες})$ <p>Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε</p> $A\Delta = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ <p style="text-align: right;">(3 μονάδες)</p> <p>Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι</p> $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 5 + 3 + 6 + 2\sqrt{10} = 14 + 2\sqrt{10} \text{ cm}.$ <p style="text-align: right;">(2 μονάδες)</p> <p>Η πραγματική περίμετρος λοιπόν του οικοπέδου είναι</p> $500(14 + 2\sqrt{10}) \text{ cm} \text{ ή } 10(7 + \sqrt{10}) \text{ m}.$ <p style="text-align: right;">(2 μονάδες)</p> <hr/> <p>Εξίσου σωστές είναι και οι απαντήσεις $5(14 + 2\sqrt{10}) \text{ m}$ ή $5(14 + \sqrt{40}) \text{ m}.$</p>
c)	<p>Παρατηρώντας τα δυο σχήματα βλέπουμε άμεσα ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΕ και ΚΛΔ είναι ίσα αφού έχουν ίσες τις κάθετες πλευρές τους. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσα και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ, ΔΕΗ και ΒΛΖ. Το Λ είναι μέσο της ΑΔ και της ΖΗ.</p> <p style="text-align: right;">(5 μονάδες)</p> <p>Επομένως</p> $(ABZ) + (\Delta E\eta) = (ABZ) + (B\Lambda Z) = (AB\Lambda)$ <p>Τότε έχουμε ότι:</p> $(B\Gamma K\Lambda) = (AB\Gamma\Delta) - (AB\Lambda) - (K\Lambda\Delta) \text{ και}$

	(5 μονάδες)
$(BEZH) = (ABΓΔ) - (ABZ) - (ΔΕΗ) - (ΒΓΕ) = (ABΓΔ) - (ABΛ) - (ΚΛΔ)$	
Άρα και τα δυο κτίρια έχουν ίσα εμβαδά.	
	(5 μονάδες)
<hr/>	
β λύση	
Πολύ εύκολα υπολογίζουμε ότι $(BΓΚΛ) = 3 \cdot 5 = 15\text{cm}^2$	
	(μονάδες 3)
Το εμβαδόν του ορθογωνίου BEZH είναι $(BEZH) = BE \cdot BZ$	
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο BΓΕ έχουμε ότι	
$BE = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$	
	(μονάδες 5)
Επειδή Λ είναι μέσον της ΑΔ και $AB=ΛB$ τότε το ύψος BZ είναι και	
διάμεσος οπότε $AZ = \frac{AΔ}{4} = \frac{2\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{2}\text{cm}$.	
	(μονάδες 2)
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ABZ έχουμε ότι	
$BZ = \sqrt{AB^2 - AZ^2} = \sqrt{25 - \frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{90}{4}}$	
Επομένως. $(BEHZ) = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{90}{4}} = \sqrt{\frac{900}{4}} = \sqrt{225} = 15\text{cm}^2$	
	(μονάδες 5)
Άρα έχουν ίσα εμβαδά.	

ΤΕΛΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ 1^{ου} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ