Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο (Άλγεβρα)

1) Δίδεται η αλγεβρική παράσταση:

$$\Pi = (\alpha-1)^2 + 2(\alpha-1)(\beta+1) + (\beta+1)^2.$$

1. Να δείξετε ότι η παράσταση Π είναι τέλειο τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

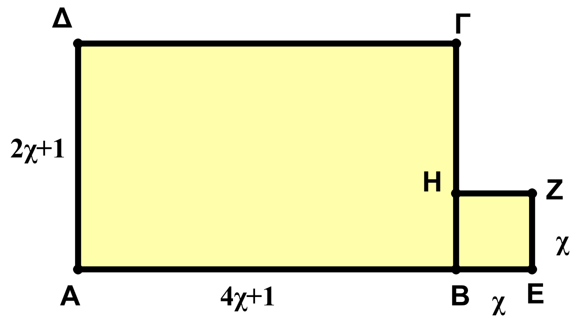
2. Εάν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha+\beta=2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Π.

(Μονάδες 2)

2) Στόχος της άσκησης είναι να βρούμε ένα τετράγωνο ισεμβαδικό με το σχήμα ΑΕΖΗΓΔ χρησιμοποιώντας αλγεβρικά και όχι γεωμετρικά εργαλεία.

1. Να γράψετε το εμβαδόν Ε(x) της επιφάνειας ΑΕΖΗΓΔ, στο παρακάτω σχήμα, σαν συνάρτηση της μεταβλητής x.

(Μονάδες 5)



2. Να παραγοντοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση Ε(x).

(Μονάδες 5)

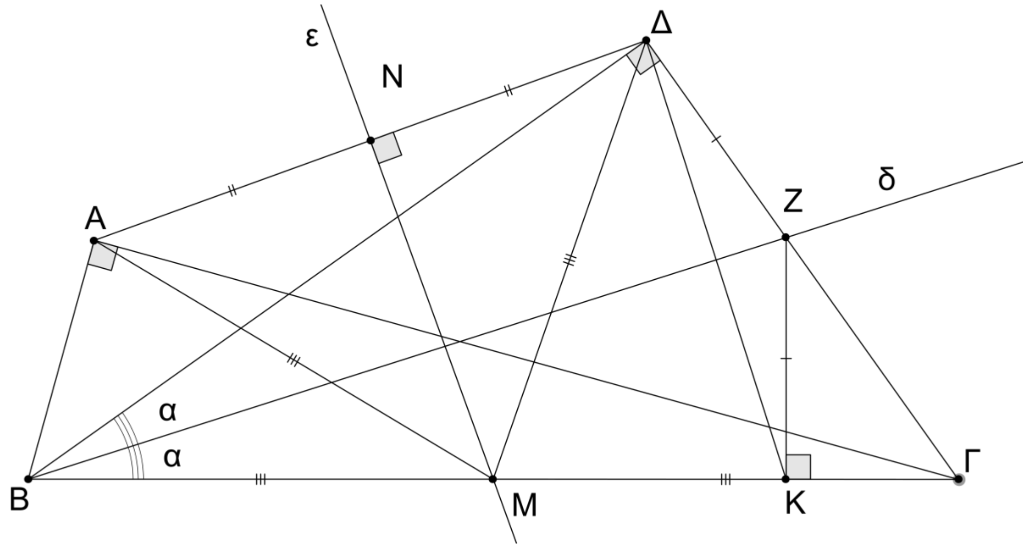
3. Να βρείτε τη πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με το παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 5)

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (Γεωμετρία)

Το παρακάτω σχήμα είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να μπορέσετε να εφαρμόσετε μερικές γεωμετρικές ιδιότητες.



Σχήμα 1

1. Συμπληρώστε σε έναν πίνακα τον αριθμό της ιδιότητας και δίπλα τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα του Σχήματος 1 που την ικανοποιούν. Για παράδειγμα:

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

Ι) Δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν γωνία 90^o.

.....

Απάντηση:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	*ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ*
Ι)	*Η ΑΒ και ΑΓ, η ΜΝ και ΑΔ, η ΒΔ και ΔΓ, η ΖΚ και ΒΓ.*
....	*.....*

Κάνετε το ίδιο με τις εξής ιδιότητες:

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
2) Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
3) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
4) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ευθ. τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.
5) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες μία προς μία ίσες, τότε είναι όμοια.
6) Στο ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος είναι διχοτόμος και ύψος.

(Μονάδες 22)

2. Αποδείξτε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Ποιές από τις παραπάνω 6 ιδιότητες χρησιμοποιήσατε;

(Μονάδες 18)

<u>ΘΕΜΑ 3^{ο}</u> (Δεξιότητες)

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει

$$\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2 < \frac{\nu}{\nu+1}$$

(Μονάδες 10)

2. Δείξτε ότι: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1}{1001}$.

(Μονάδες 25)

<u>ΤΕΛΟΣ 2^{ου} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ</u>

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΟ 2^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΔΥΣΚΟΛΟ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

(Λυκούδης Σπύρος Πρότυπο πειραματικό Γυμνάσιο Ιωνιδείου Σχολής και Πουλάκη Μαρία 2^{ο} Πρότυπο Πειραματικό Γυμνάσιο)

1.

1)

$Π = (α-1)^2 + 2(α-1)(β+1) + (β+1)^2 =$	
$[(α-1) + (β+1)]^2 =$	5 μονάδες
$[α+β]^2$	3 μονάδες

2) $Π = (α+β)^2 = 2^2 = 4$ (2 μονάδες)

2.

1) $Ε = (2x+1)(4x+1)+x^2$

(5 μονάδες)

2)

$Ε = (2x + 1)(4x + 1) + x^2$	
$= 8x^2 + 2x + 4x + 1 + x^2$	2 μονάδες
$= 9x^2 + 6x + 1$	1 μονάδες
$= (3x + 1)^2$	2 μονάδες

3) Αφού $Ε = (3x + 1)^2$, άρα το σχήμα είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο πλευράς $3x + 1$.

(5 μονάδες)

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr

ΘΕΜΑ 2ο (Λυγάτσικας Ζ. Βαρβάκειο Λύκειο)

1.	Ιδ. 1 – ΔΜ διάμεσος = ΒΓ/2 ΑΜ διάμεσος = ΒΓ/2 Ιδ. 2 – ΒΖ διχοτόμος της γων. Β και ΖΔ = ΖΚ Ιδ. 3 – ΜΝ μεσοκάθετος ΑΔ και ΜΑ = ΜΔ Ιδ. 4 – ΜΑ = ΜΔ και Μ είναι στη μεσοκάθετο ΜΝ Ιδ. 5 – ΒΔΓ και ΚΖΓ Ιδ. 6 – • ισοσκλ. τριγ. ΑΜΔ, ΜΝ διάμεσος = ύψος και διχοτόμος. • ισοσκελες τριγ. ΚΒΔ με ΒΖ διχοτόμο	3 μον 3 μον. 3 μον. 3 μον. 4 μον. 6 μον.
2.	Αρκεί να δείξω ότι ΜΑ = ΜΔ. Το τριγ. ΒΑΓ είναι ορθ. άρα ΑΜ = ΒΓ/2 Το τριγ. ΔΒΓ είναι ορθ. άρα ΔΜ = ΒΓ/2 Άρα, ΑΜ = ΔΜ και Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Χρησιμοποίησα τις 3 και 4.	3 μον. 3 μον. 2 μον. 4 μον. 6 μον.

ΘΕΜΑ 3ο (Μπιτσιτέ Βάια Δ/ντρια Πρότυπου Πειραματικού Γυμνασίου Αγ. Αναργύρων)

1.

$\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2 < \frac{\nu}{\nu+1}$	
$\frac{4\nu^2}{(2\nu+1)^2} < \frac{\nu}{\nu+1}$ ισχύει ν+1>0 καί $(2\nu+1)^2 > 0$	5 μονάδες
$4\nu^2(\nu+1) < \nu(2\nu+1)^2$	2 μονάδες
$4\nu^3 + 4\nu^2 < 4\nu^3 + 4\nu^2 + \nu$ $0 < \nu$ αληθεύει για κάθε φυσικο αριθμό ν.	2 μονάδες

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr

	1 μονάδα

ΣΥΝΟΛΟ Μονάδων 10

2. Από την 1 για διαδοχικές τιμές του ν από 1 έως 1000 προκύπτει :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 < \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^2 < \frac{3}{4}$$

.

.

.

$$\left(\frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1000}{1001}$$

Μονάδες 10

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{1000}{1001}$$ και μετά τις απλοποιήσεις

Μονάδες 10

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1}{1001}$$

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ 2^{ου} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ