Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Ιδιότητες

Αν $\theta > 0$ τότε:

1. $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$

2. $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής για να επιλύουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές.

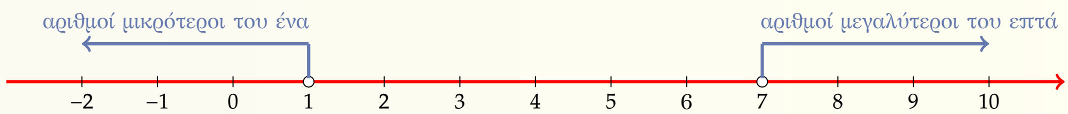
Παραδείγματα

•Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση: $|x-4| > 3$. (1)

Με τη βοήθεια της ιδιότητας 1 εργαζόμαστε ως εξής:

$$|x-4| > 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-4 < -3 \\ \text{ή} \\ x-4 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < -3+4 \\ \text{ή} \\ x > 3+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 1 \\ \text{ή} \\ x > 7 \end{array}\right.$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$. Αν παραστήσουμε τις λύσεις στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε,



•Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση:

$$\frac{|2x-1|-3}{2} - \frac{2}{3} \leq \frac{-7|1-2x|}{12} \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $2x-1$ και $1-2x$ είναι αντίθετοι. Επομένως, έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, δηλαδή, $|2x-1| = |1-2x| = \omega$. Η ανίσωση (2) γίνεται:

$$\frac{\omega-3}{2} - \frac{2}{3} \leq -\frac{7\omega}{12} \Leftrightarrow 12\frac{\omega-3}{2} - 12\frac{2}{3} \leq -12\frac{7\omega}{12}$$

$$\Leftrightarrow 6(\omega-3) - 4 \cdot 2 \leq -7\omega \Leftrightarrow 6\omega - 18 - 8 \leq -7\omega$$

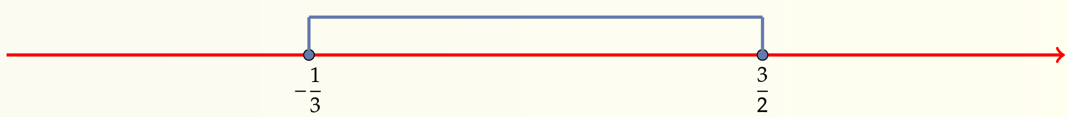
$$\Leftrightarrow 6\omega + 7\omega \leq 26 \Leftrightarrow 13\omega \leq 26 \Leftrightarrow \omega \leq \frac{26}{13}$$

$$\Leftrightarrow \omega \leq 2 \qquad (*)$$

Ισχύει ότι, $\omega = |2x-1|$, επομένως η ανίσωση (*) γίνεται:

$$|2x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -2+1 \leq 2x \leq 2+1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \leq 3 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}}$$

Αν παραστήσουμε τις λύσεις στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε,



Άσκηση 1

Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $|x| > 5$ **β.** $|x| \leq 2$ **γ.** $|2\alpha - 3| \leq -6$ **δ.** $|x| > -2$ **ε.** $|x - 3| \leq 1$

στ. $|3x + 1| \geq 5$ **ζ.** $2|-x + 3| < 6$ **η.** $\dfrac{3|-\omega| + 4}{6} < |\omega| + \dfrac{1}{3}$ **θ.** $\dfrac{|1 - 3x|}{3} + \dfrac{1}{5} > -\dfrac{|3x - 1|}{15}$

[Απ. α. $x < -5$ ή $x > 5$ β. $-2 \leq x \leq 2$ γ. αδύνατη δ. $x \in \mathbb{R}$ ε. $2 \leq x \leq 4$ στ. $x \leq -2$ ή $x \geq \frac{4}{3}$ ζ. $0 < x < 6$ η. $\omega < -2$ ή $\omega > 2$ θ. $x \in \mathbb{R}$]

Παράδειγμα

•Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση: $2 \leq |x - 4| \leq 5$. (3)

Η σχέση (3) ουσιαστικά περιγράφει δύο ανισώσεις, τις οποίες θα λύσουμε χωριστά:

$$|x-4| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \leq -2 \\ \text{ή} \\ x - 4 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 + 4 \\ \text{ή} \\ x \geq 2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \text{ή} \\ x \geq 6 \end{cases}$$

•Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$.

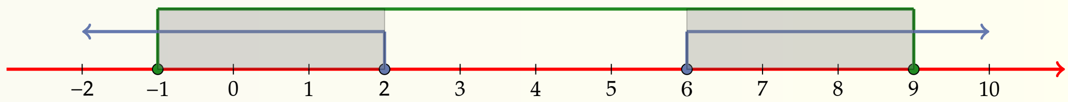
$$|x - 4| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 4 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -5 + 4 \leq x \leq 5 + 4$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 9$$

•Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in [-1, 9]$.

Αν παραστήσουμε τις λύσεις στον ίδιο άξονα έχουμε,



Άσκηση 2

Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $3 < |x| < 5$ **β.** $1 \leq |2x - 1| \leq 4$ **γ.** $-8 \leq |2\alpha - 3| \leq -6$ **δ.** $-1 < |4\omega - 2| < 2$

[Απ. α. $(-5, -3) \cup (3, 5)$ β. $[-\frac{3}{2}, 0] \cup [1, \frac{5}{2}]$ γ. αδύνατη δ. $(0, 1)$]