Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Γ΄

Δράμα 02 Απριλίου 2017

Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση **f(x)=-ln(συνχ)** με $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

A. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

B. Αν $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ τρία σημεία της γραφικής παράστασης έτσι ώστε τα x_1,x_2,x_3 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $0\leq x_1<x_2<x_3$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης στα A, B, Γ ανά δυο τεμνόμενες σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

Γ. Στην περίπτωση όπου $x_1=0$, $x_2=\omega$, $x_3=2\omega$ με $\omega \in (0,\frac{\pi}{4})$ και E(ω) είναι το εμβαδόν του παραπάνω ισοσκελούς τριγώνου, να βρείτε το $\lim\limits_{\omega\to\frac{\pi}{4}} E(\omega)$

Λύση

A. Ισχύει f(-x)=f(x) για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ δηλαδή η f είναι άρτια συνάρτηση.

f΄(x)=εφx

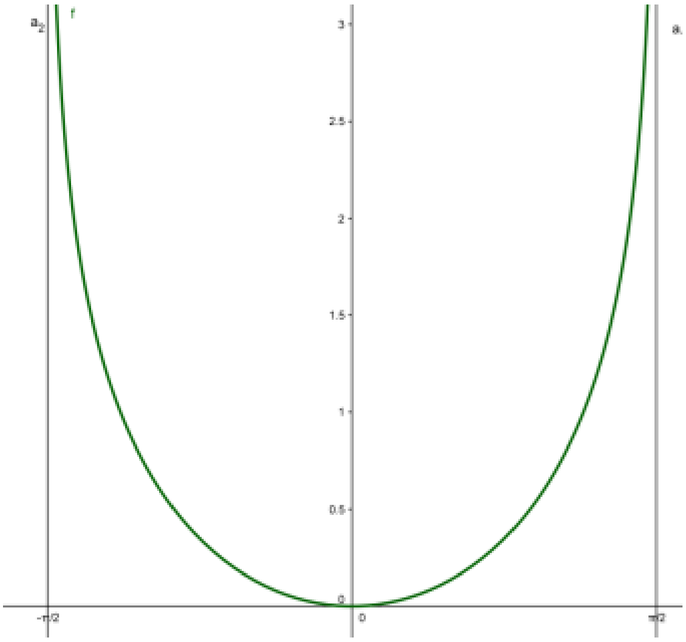
f΄΄(x)=$\frac{1}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2}$=1+εφ^{2}x

Είναι f΄(x)<0 για κάθε x $\in$ (-π/2,0) άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-π/2,0], αφού είναι συνεχής στο 0. Επίσης f΄(x)>0 για κάθε x $\in$ (0,π/2) κι έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,π/2). Έτσι στη θέση χ=0 η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με f(0)=0. Έτσι f(x)$\geq$0 για κάθε x $\in$ (-π/2,π/2).

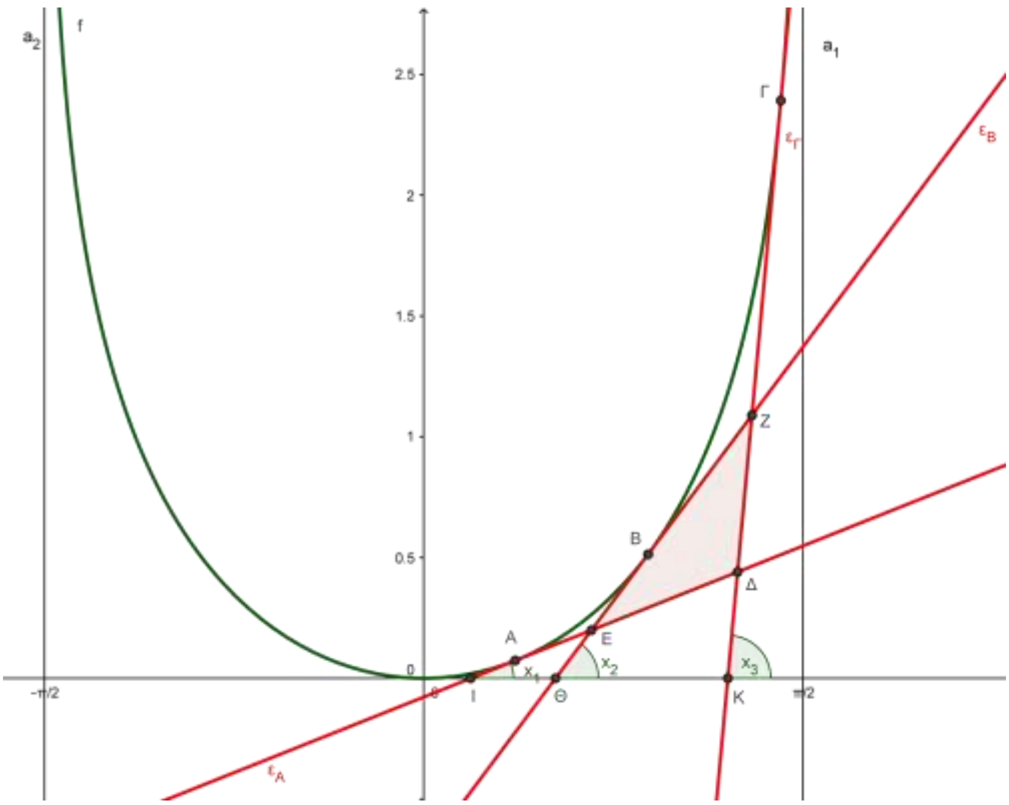
Αφού f΄΄(x)>0 για κάθε x $\in$ (-π/2,π/2) η συνάρτηση είναι κυρτή.

$\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\pi/2} f(x) = +\infty$

Έτσι οι ευθείες χ=-π/2 και χ=π/2 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.



B.



Φέρνουμε τις εφαπτομένες στα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$.

Από τη σχέση $f'(x)=\varepsilon\varphi x$ συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτομένες με τον χ'χ άξονα είναι αντίστοιχα x_1, x_2, x_3. Αφού $0\leq x_1< x_2< x_3<\pi/2$ οι συντελεστές διευθύνσεως των εφαπτομένων είναι άνισοι, άρα αυτές τέμνονται, έστω στα σημεία Δ,Ε,Ζ. Παρατηρούμε τώρα ότι:

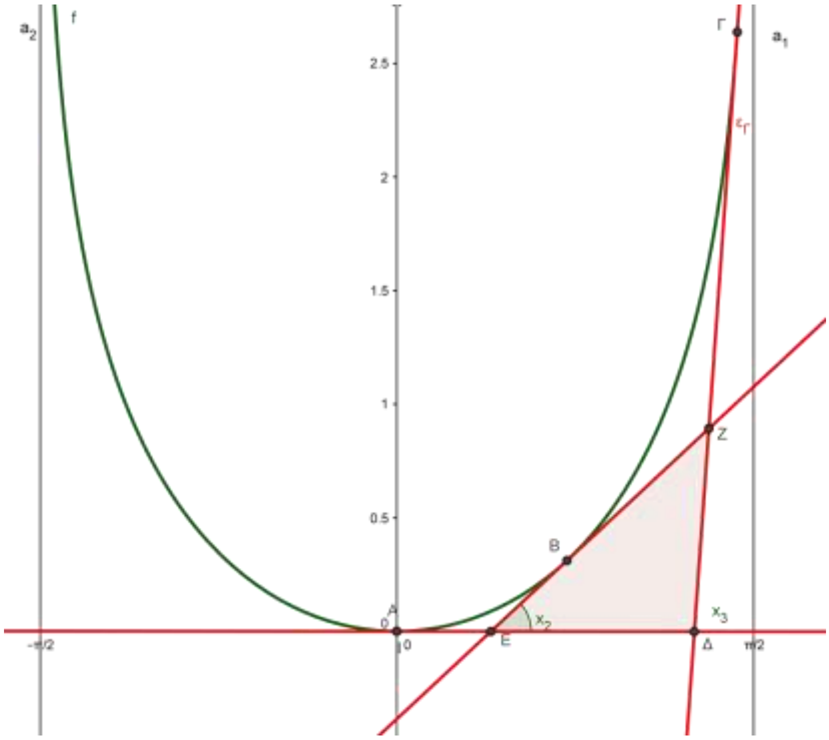
$x_3=x_2+Z$ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΘΚΖ) δηλαδή $Z= x_3-x_2$.

$x_2=x_1+E$ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΕΘΙ) άρα $E= x_2-x_1$. Εφόσον οι αριθμοί x_1,x_2,x_3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου θα ισχύει $x_2-x_1= x_3-x_2$ συνεπώς Ζ=Ε κι έτσι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

Γ.

Η εφαπτομένη στο Α είναι η ευθεία y=0 δηλαδή ο χ'χ άξονας. Η εφαπτομένη στο Β(ω,f(ω)) έχει εξίσωση y=εφω(χ-ω)+f(ω) και τέμνει τον χ'χ στο σημείο Ε με τετμημένη $\omega-\frac{f(\omega)}{\varepsilon\varphi\omega}$.

Η εφαπτομένη στο σημείο Γ(2ω,f(2ω)) είναι y=εφ2ω(χ-2ω)+f(2ω) και τέμνει τον χ΄χ στο σημείο Δ με τετμημένη $2\omega-\frac{f(2\omega)}{\varepsilon\varphi 2\omega}$



Θα είναι λοιπόν (ΕΔ)=ω+$\frac{f(\omega)}{\varepsilon\varphi\omega}-\frac{f(2\omega)}{\varepsilon\varphi 2\omega}$

Τώρα $\lim_{\omega\to\pi/4}\frac{f(\omega)}{\varepsilon\varphi\omega}$ =ln$\sqrt{2}$=$\frac{ln2}{2}$

$$\lim_{\omega\to\pi/4}\frac{f(2\omega)}{\varepsilon\varphi 2\omega}=\lim_{\omega\to\pi/4}\frac{f'(2\omega)2}{\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 2\omega}}=\lim_{\omega\to\pi/4}\varepsilon\varphi 2\omega\sigma\upsilon\nu^2 2\omega=\lim_{\omega\to\pi/4}\eta\mu 2\omega\sigma\upsilon\nu 2\omega=0$$

Έτσι $\lim_{\omega\to\pi/4}E\Delta=\frac{\pi}{4}+\frac{ln2}{2}$. Επειδή το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές, όταν ω->π/4 θα είναι Δ->π/2 και και Ζ->π/4. Έτσι για το εμβαδόν Ε(ω) θα έχουμε

$\lim_{\omega\to\pi/4}E(\omega)=\lim_{\omega\to\pi/4}\frac{E\Delta^2}{2}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{ln2}{2})^2$.

(για επεξεργασία σχήματος με Geogebra δείτε στην παρακάτω διεύθυνση)

https://www.geogebra.org/m/z4mwzJwf

Θέμα Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f: R \to R}$ για την οποία ισχύει **f(f(x))=x+2** για κάθε $x \in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in R$ ώστε $\mathbf{f(x_0)=x_0+1}$

Γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι η εξίσωση **f΄(x)=1** έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

Λύση

α) Αν $x_1, x_2 \in R$ $\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow 1+x_1 = 1+x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Άρα η f είναι 1 -1.

β) Έστω ότι το ζητούμενο δεν συμβαίνει άρα $f(x) \neq x+1$ για κάθε $x \in R$.

Έστω συνάρτηση $g(x) = f(x) - x - 1$ για κάθε $x \in R$ Άρα η συνάρτηση $g(x) \neq 0$ και αφού επιπλέον είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Δηλαδή θα ισχύει g(x) > 0 για κάθε $x \in R$ ή g(x) < 0 για κάθε $x \in R$.

- Αν υποθέσουμε ότι ισχύει g(x) > 0 για κάθε $x \in R$, τότε έχουμε: $f(x) > x+1$ για κάθε $x \in R$ (2)

Αφού η σχέση (2) ισχύει για κάθε $x \in R$, θέτουμε όπου χ το f (χ) και βρίσκουμε: $f(f(x)) > f(x)+1$ άρα λόγω υπόθεσης έχουμε $1+x > f(x)$ (3) άτοπο από τη (2)

- Όμοια αποκλείεται και η περίπτωση g(x) < 0 για κάθε $x \in R$.

Άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = x_o + 1$

γ) Για την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x - 1$ για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $g(x_o) = f(x_o) - x_o - 1 = 0$

και $g(f(x_o)) = f(f(x_o)) - f(x_o) - 1 = x_o + 2 - x_o - 1 - 1 = 0$

Έχουμε ακόμα ότι $f(x_o) > x_o$ γιατί $f(x_o) - x_o = 1 > 0$ ισχύει.

Σύμφωνα με το θεώρημα ROLLE στο διάστημα $[x_o, f(x_o)]$ για τη συνάρτηση g(x) (ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις) προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης g'(x)=0 στο διάστημα $(x_0, f(x_0))$. Όμως $g'(x) = f'(x) - (x+1)' = f'(x) - 1$ συνεπώς η εξίσωση f'(x)=1 έχει επίσης τουλάχιστον μία πραγματική λύση στο διάστημα $(x_o, f(x_o))$.