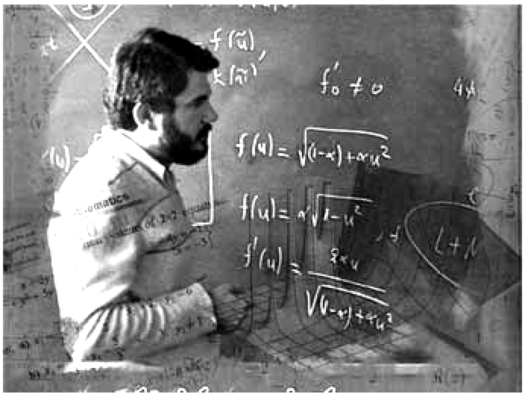
Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Γ΄

Δράμα 1 Απριλίου 2012

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f(x) + f''(x) = 1$ για κάθε $x \in R$.

i) να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$

ii) να δείξετε ότι $f^2(x) - 2f(x) + \left(f'(x)\right)^2 = 0$ για κάθε $x \in R$.

iii) να δείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = f(x) + 2x$, $x \in R$ είναι γνησίως αύξουσα.

iv) δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2}{f(x)+2x} - \dfrac{1}{f(1)+2} - \dfrac{1}{f(2)+4}$, $x \in$ [1,2].

Δείξτε ότι η g αντιστρέφεται και η γραφική παράσταση της αντίστροφης της τέμνει τον άξονα ψ΄ψ σε ένα σημείο με τεταγμένη στο διάστημα (1,2)

Θέμα 2°

Α. Να αποδείξετε ότι $e^{x^2} > 2x$ για κάθε $x \in R$

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ ώστε:

$x - f(x) = e^{-f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$.

α) να αποδείξετε ότι f(1) = 0

β) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το R.

<u>Θέμα 1ο</u>

i) Το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; , η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα με δύο διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος d' Hospital θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{2}=\frac{1}{2}.$$

ii) Έστω η συνάρτηση $h(x)=f^2(x)-2f(x)+\left(f'(x)\right)^2$ στο R.

$$h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2f'(x)+2f'(x)\cdot f''(x)=$$

$$=2f'(x)\left(f(x)-1+f''(x)\right)=2f'(x)\cdot 0=0$$

Για την h(x) η οποία είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R, ισχύει:

$h'(x)=0$. Επομένως $h(x)=c,\quad c\in R$.

Άρα $f^2(x)-2f(x)+\left(f'(x)\right)^2=c.$ Και αν θέσουμε όπου x=0

Προκύπτει $c=0$. Επομένως $f^2(x)-2f(x)+\left(f'(x)\right)^2=0.$

iii) Στο R έχουμε $\phi'(x)=f'(x)+2$ **(1).**

Επίσης $f^2(x)-2f(x)+\left(f'(x)\right)^2=0\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)+1=1-\left(f'(x)\right)^2\Leftrightarrow\left(f(x)-1\right)^2=1-\left(f'(x)\right)^2$, $x\in R$.

Άρα $1-\left(f'(x)\right)^2\geq 0\quad\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)^2\leq 1\quad\Leftrightarrow\left|f'(x)\right|\leq 1$

$$\Leftrightarrow -1\leq f'(x)\leq 1\ \Leftrightarrow 1\leq f'(x)+2\leq 3\overset{(1)}{\Leftrightarrow}1\leq\phi'(x)\leq 3$$

Δηλαδή $\phi'(x)>0$ στο R, άρα $\phi\uparrow$ στο R.

iv) $g(x)=\dfrac{2}{f(x)+2x}-\dfrac{1}{f(1)+2}-\dfrac{1}{f(2)+4}\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{2}{\phi(x)}-\dfrac{1}{\phi(1)}-\dfrac{1}{\phi(2)}$.

Επίσης στο [1,2] $g'(x)=-\dfrac{2\phi'(x)}{\phi^2(x)}<0$, $g\downarrow$, $g:1-1$

άρα αντιστρέφεται.

Επίσης.

- g συνεχής στο [1,2]
- $g(1)=\dfrac{2}{\phi(1)}-\dfrac{1}{\phi(1)}-\dfrac{1}{\phi(2)}=\dfrac{1}{\phi(1)}-\dfrac{1}{\phi(2)}=\dfrac{\phi(2)-\phi(1)}{\phi(1)\phi(2)}$

$$g(2)=\frac{2}{\phi(2)}-\frac{1}{\phi(1)}-\frac{1}{\phi(2)}=\frac{1}{\phi(2)}-\frac{1}{\phi(1)}=\frac{\phi(1)-\phi(2)}{\phi(1)\phi(2)}$$

Επομένως $g(1)\cdot g(2)=-\dfrac{(\phi(1)-\phi(2))^2}{(\phi(1)\cdot\phi(2))^2}<0$ γιατί ,

$\phi\uparrow$, άρα 1-1, επομένως $1\neq 2\Leftrightarrow \phi(1)\neq\phi(2)$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$, (το οποίο είναι μοναδικό) έτσι ώστε

$g(x_0)=0\overset{\exists g^{-1}}{\Leftrightarrow} g^{-1}(0)=x_0$.

Άρα η γραφική παράσταση της g^{-1} τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Α(0, x_0) με $x_0\in(1,2)$.

<u>Θέμα 2°</u>

Α. Αν $x\leq 0$ η προς απόδειξη ανισότητα είναι προφανής.

Αν $x>0$, λογαριθμίζω οπότε αρκεί $x^2>\ln 2x$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=x^2-\ln 2x$ στο $(0,+\infty)$.

$g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της $g(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		–	+
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

$$\min: g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

Ισχύει $g(x)\geq \frac{1}{2}(1-\ln 2)=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 2)=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{e}{2}$, Επίσης $\ln x\uparrow$

άρα $\frac{e}{2}>1\Leftrightarrow \ln\frac{e}{2}>\ln 1=0$. Επομένως $\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{e}{2}>0$ Άρα

$g(x)>0\Leftrightarrow x^2>\ln 2x$, x>0. Τελικά $e^{x^2}>2x$ για κάθε $x\in R$.

Β.

α) $x-f(x)=e^{-f^2(x)}$. Για x = 1 έχουμε

$1-f(1)=e^{-f^2(1)} \Leftrightarrow e^{-f^2(1)}+f(1)-1=0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=e^{-x^2}+x-1$ στο R, για την οποία ισχύει:

$h(0)=0$ και $h(f(1))=e^{-f^2(1)}+f(1)-1=0$

Επίσης $h'(x)=\dfrac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}>0$

γιατί από το **Α,** $e^{x^2}-2x>0$. Άρα $h'(x)>0$ στο R, $h\uparrow$
οπότε το μηδέν είναι μοναδική ρίζα. Επομένως:

$h(f(1))=h(0)\overset{h(x):1-1}{\Leftrightarrow} f(1)=0$

β) $x-f(x)=e^{-f^2(x)}$ **(1).**

f παραγωγίσιμη στο R άρα η σχέση (1) γίνεται:

$1-f'(x)=-2f(x)\cdot f'(x)e^{-f^2(x)}\Leftrightarrow$

$1=f'(x)-2f(x)\cdot f'(x)e^{-f^2(x)}\Leftrightarrow 1=f'(x)\left(1-\dfrac{2f(x)}{e^{f^2(x)}}\right)\Leftrightarrow$

$1=f'(x)\left(\dfrac{e^{f^2(x)}-2f(x)}{e^{f^2(x)}}\right)$. Αλλά από το **Α,** $e^{f^2(x)}>2f(x)$,

επομένως η τελευταία σχέση μας δίνει $f'(x)>0$ στο R, άρα $f\uparrow$.

γ) Ισχύει $f\uparrow$ στο $\mathrm{A}=(-\infty,+\infty)$, στο οποίο είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Άρα το σύνολο τιμών θα είναι

$f(\mathrm{A})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$ **(2)**

Για χ < 0 είναι $e^{-f^2(x)} > 0$ άρα από την **(1)**
$x - f(x) > 0 \Leftrightarrow x > f(x)$.

Επομένως επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. **(3)**

<u>(χρειάζεται απόδειξη)</u>

Για χ > 1, $f(x) \overset{f\uparrow}{>} f(1) = 0$. Άρα $f^2(x) > 0 \Leftrightarrow -f^2(x) < 0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}$
$e^{-f^2(x)} < e^0 = 1$, Επομένως και $x - f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) > x - 1$

Επομένως επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. **(4)**

<u>(Χρειάζεται απόδειξη)</u>

Από τις σχέσεις **(2), (3)** και **(4)** το σύνολο τιμών της f είναι:
$f(\mathrm{A}) = R$.

Άλλη λύση για το Β του 2ου Θέματος.

Για κάθε χ $\in R$ ισχύει: $x - f(x) = e^{-f^2(x)}$ (1)

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^{-x^2} + x$, με χ$\in \mathrm{A} = R$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = -2xe^{-x^2} + 1 =$

$= 1 - \dfrac{2x}{e^{x^2}} = \dfrac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}} > 0$. Άρα $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα,

οπότε 1 – 1. Επομένως ορίζεται η $g^{-1} : g(\mathrm{A}) \to R$.

Επίσης η g ως συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών
$g(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Άρα $g^{-1} : g(\mathrm{A}) = R \to R$

Επειδή οι f, g ορίζονται στο R και η $g \circ f$ ορίζεται στο R, με
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = e^{-f^2(x)} + f(x) = x$. Άρα

$g\big(f(x)\big) = x \overset{g^{-1}}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1}(x)$. Άρα

α) $g\big(f(1)\big) = 1 \Leftrightarrow g(f(1)) = g(0) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$

β) Για κάθε $\psi_1, \psi_2 \in g(A) = R$ με

$\psi_1 < \psi_2 \Leftrightarrow g\big(g^{-1}(\psi_1)\big) < g\big(g^{-1}(\psi_2)\big) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g^{-1}(\psi_1) < g^{-1}(\psi_2)$

Άρα $g^{-1} \uparrow$ οπότε $f \uparrow$

γ) Σύνολο τιμών της f =σύνολο τιμών της g^{-1}=
πεδίο ορισμού της g = R.