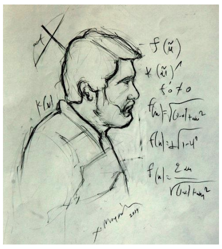
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας



Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά : Τάξη: Α΄

Δράμα 29 Μαρτίου 2015

Θέμα Α

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{4\lambda^2 - 28\lambda + 49} = \lambda\sqrt{4\lambda^2 - 28\lambda + 49} - \frac{x}{3}$. **(1)**

Α1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$, για τις οποίες η εξίσωση **(1)** έχει μοναδική λύση x_0.

Α2. Να εκφραστεί η μοναδική λύση x_0 συναρτήσει του λ.

Α3. Να βρεθεί το λ έτσι ώστε η μοναδική λύση x_0 να ανήκει στο διάστημα $(-\infty, 9]$.

Θέμα Β

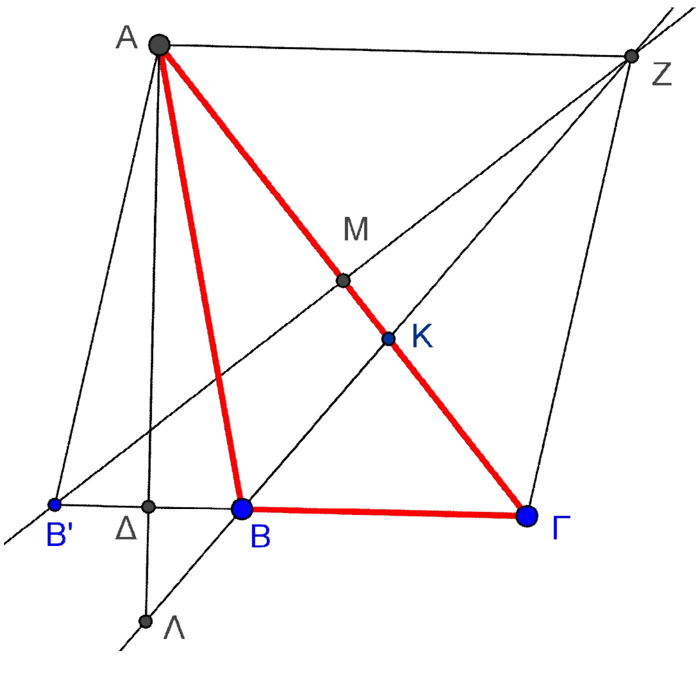
Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** $\left(\hat{B} > 90^{o}\right)$ ισχύει:

- $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$
- ΑΔ ύψος
- Β΄ συμμετρικό του Β ως προς το Δ.

Να δείξετε ότι:

Β1. ΑΒ = ΔΒ + ΔΓ

Β2. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει τις ΑΓ και ΑΔ στα Κ και Λ αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι ΚΑ = ΚΛ.



Β3. Έστω Μ είναι το μέσο του ΑΓ και Ζ το σημείο τομής των Β΄Μ και ΒΚ να φέρετε από το σημείο Ζ τις κάθετες ΖΘ και ΖΗ προς τις ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και να δείξετε ότι οι γωνίες $\Theta\hat{A}Z$ *και* $H\hat{\Gamma}Z$ είναι ίσες.

Β4. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο Β΄ΓΖΑ είναι ρόμβος

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά : Τάξη: Α΄

Δράμα 29 Μαρτίου 2015

Θέμα Α

Α1. Αρχικά το τριώνυμο $4\lambda^2 - 28\lambda + 49$ έχει διακρίνουσα Δ = 0 με διπλή ρίζα τον αριθμό $\frac{7}{2}$. Επομένως έχουμε $4\lambda^2 - 28\lambda + 49 = 4\left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 28\lambda + 49 = 2^2\left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 28\lambda + 49 = (2\lambda - 7)^2$$

και $\sqrt{4\lambda^2 - 28\lambda + 49} = \sqrt{(2\lambda - 7)^2} = |2\lambda - 7|$.

Ή αμέσως από ταυτότητα ισχύει: $\sqrt{4\lambda^2 - 28\lambda + 49} = \sqrt{(2\lambda - 7)^2} = |2\lambda - 7|$

Επομένως η **(1)** γίνεται: $\lambda \cdot x - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4\lambda^2 - 28\lambda + 49} = \lambda\sqrt{4\lambda^2 - 28\lambda + 49} - \frac{x}{3}$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot x - \frac{1}{3} \cdot |2\lambda - 7| = \lambda|2\lambda - 7| - \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3\lambda \cdot x - |2\lambda - 7| = 3\lambda|2\lambda - 7| - x$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda \cdot x + x = 3\lambda|2\lambda - 7| + |2\lambda - 7| \Leftrightarrow (3\lambda + 1)x = (3\lambda + 1)|2\lambda - 7|.$$

Η τελευταία εξίσωση για να έχει μοναδική λύση θα πρέπει

$3\lambda + 1 \neq 0$ ή $\lambda \neq -\frac{1}{3}$

Α2. Όταν $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ θα είναι $3\lambda + 1 \neq 0$ και η μοναδική λύση είναι

$$\Leftrightarrow x_0 = |2\lambda - 7|$$

Α3. Για να βρίσκεται η μοναδική λύση $x_0 = |2\lambda - 7|$ στο διάστημα $(-\infty, 9]$ πρέπει $|2\lambda - 7| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq 2\lambda - 7 \leq 9$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\lambda \leq 16 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 8$$ και λόγω του περιορισμού $\lambda \neq -\frac{1}{3}$

Πρέπει το $\lambda \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 8\right]$.

Θέμα Β

Β$_1$. Β΄ συμμετρικό του Β ως προς το Δ, άρα ΔΒ = ΔΒ΄ και ΑΒ΄=ΑΒ

Θέλουμε να δείξουμε ότι: ΑΒ = ΔΒ + ΔΓ $\Leftrightarrow$ ΑΒ΄ = ΔΒ΄ + ΔΓ $\Leftrightarrow$ ΑΒ΄= ΓΒ΄.

Άρα αρκεί το τρίγωνο ΓΑΒ΄ να είναι ισοσκελές ή $\mathrm{B'\hat{A}\Gamma} = \hat{\Gamma}$. **(1)**

Η γωνία Β ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΒ΄ ισούται:

$\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B\hat{B}'A} + \mathrm{B\hat{A}B'} \overset{\hat{\mathrm{B}}=2\hat{\Gamma}}{\Leftrightarrow} 2\hat{\Gamma} = \mathrm{B'\hat{B}A} + \mathrm{B\hat{A}B'}$ (Τρίγωνο ΑΒΒ΄ισοσκελές).

Η τελευταία σχέση μετασχηματίζεται σε $2\hat{\Gamma} = \mathrm{B\hat{A}\Gamma} + \mathrm{B\hat{A}B'} + \hat{\Gamma}$ επειδή η $\mathrm{B'\hat{B}A}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Άρα $2\hat{\Gamma} = \mathrm{B\hat{A}\Gamma} + \hat{\Gamma} + \mathrm{B\hat{A}B'} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \mathrm{B\hat{A}\Gamma} + \mathrm{B\hat{A}B'} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \mathrm{B'\hat{A}\Gamma}$,

άρα ισχύει από την σχέση **(1)**

Β$_2$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^0 - \hat{\Gamma}$

Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΛ ισχύει:

$\mathrm{\Delta\hat{\Lambda}B} = 90^0 - \mathrm{\Delta\hat{B}\Lambda} = 90^0 - \mathrm{K\hat{B}\Gamma} = 90^0 - \hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{\Lambda\hat{A}K} = \mathrm{A\hat{\Lambda}K}$, Δηλαδή το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές και ΑΚ = ΚΛ.

Β$_3$. Το τρίγωνο ΑΘΖ = τρίγωνο ΖΓΗ γιατί είναι:

- Ορθογώνια
- ΖΘ = ΖΗ αποστάσεις σημείου της διχοτόμου από τις πλευρές)
- ΑΖ = ΖΓ (Τρίγωνο ΑΒΒ΄ισοσκελές άρα Β΄Μ διάμεσος και ύψος, ΖΒ΄ μεσοκάθετος της ΑΓ)

Άρα $\mathrm{\Theta\hat{A}Z} = \mathrm{H\hat{\Gamma}Z}$.

Β$_4$. Επειδή $\mathrm{\Theta\hat{A}Z} = \mathrm{H\hat{\Gamma}Z}$ και $\mathrm{K\hat{A}Z} = \mathrm{K\hat{\Gamma}Z}$ ισχύει ότι

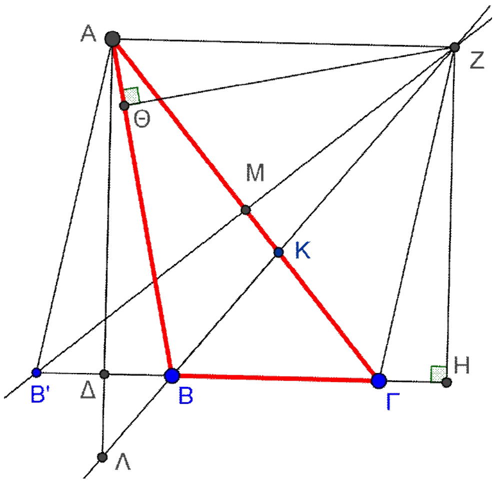
$\hat{\mathrm{A}} + \mathrm{K\hat{A}Z} = 180^0 - \hat{\Gamma} - \mathrm{K\hat{A}Z}$ $(\mathrm{B\hat{\Gamma}Z} + \mathrm{H\hat{\Gamma}Z} = 180^0)$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{K\hat{A}Z} = 180^0 - \hat{\Gamma} - \hat{\mathrm{A}} \Leftrightarrow 2\mathrm{K\hat{A}Z} = \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow 2\mathrm{K\hat{A}Z} = 2\hat{\Gamma}$. Άρα $\Leftrightarrow \mathrm{K\hat{A}Z} = \hat{\Gamma}$.

Επομένως το τρίγωνο Β΄ΓΖ είναι ισοσκελές αφού ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος.

Τελικά ΑΒ΄= ΑΖ = ΖΓ = ΓΒ΄. Άρα το τετράπλευρο Β΄ΓΖΑ είναι ρόμβος.

Δείτε το σχήμα της άσκησης με το λογισμικό geogebra εδώ.


Α
Ζ
Θ
Μ
Κ
Η
Β'
Δ
Β
Γ
Λ