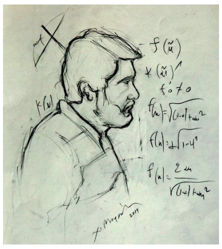
Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας



Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά : Τάξη: Γ΄

Δράμα 29 Μαρτίου 2015

Θέμα Α

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(x) = (\alpha + x)^{\nu} + (a - x)^{\nu}$, όπου $\alpha > 0$ και ν θετικός ακέραιος, $\nu > 1$ τότε:

Α1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ και ότι $f\left(-3^{2015}\right) \cdot f\left(3^{2017}\right) > 4 \cdot a^{2\nu}$.

Α2. Να λυθεί η εξίσωση $(1 + x)^{2014} + (1 - x)^{2014} = 2$.

Α3. Να δείξετε ότι για $x \neq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(5^{x^2}) - f\left(1 + \ln\left(1 + x^2\right)\right)$ είναι πάνω από τον άξονα χ΄χ.

Α4. Έστω ότι για κατάλληλες τιμές των α και ν ισχύουν οι σχέσεις: $f(1) > 1$ και $f(2) < 10$, τότε να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει σε δύο τουλάχιστον σημεία τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = 3x^2 - 2$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση, με $f(x) = e^x$, $x \in R$ και η ευθεία **(ε):** χ + ψ + 1 = 0

Β1. Να δείξετε ότι η ευθεία **(ε)** τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **f** σε ένα ακριβώς σημείο (ρ, e^{ρ}).

Β2. Να βρεθούν όλα τα σημεία της ευθείας **(ε),** από τα οποία μπορούμε να φέρουμε δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της **f.**

Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u>

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά : Τάξη: Γ΄

Δράμα 29 Μαρτίου 2015

Θέμα Α

Α1. $f'(x)=\nu(a+x)^{\nu-1}-\nu(a-x)^{\nu-1}$. Άρα

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \nu(a+x)^{\nu-1}-\nu(a-x)^{\nu-1}=0 \Leftrightarrow \nu(a+x)^{\nu-1}=\nu(a-x)^{\nu-1}$

$\Leftrightarrow (a+x)^{\nu-1}=(a-x)^{\nu-1}$ **(1)**

- Αν ν άρτιος, ν – 1 περιττός οπότε η **(1)** γίνεται α+χ=α-χ $\Leftrightarrow$ χ = 0.
- Αν ν περιττός, ν – 1 άρτιος οπότε η **(1)** γίνεται α+χ= $\pm$ (α-χ)

$\Leftrightarrow$ χ = 0 ή α = 0 (άτοπο). Άρα τελικά χ = 0.

f' συνεχής με μοναδική ρίζα το 0 και με επιλεγμένους αριθμούς π.χ. –α και α ,έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας - ακροτάτου.

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

minf = f(0) = $2a^{\nu}$

Ισχύει: $f(x)\geq f(0)=2a^{\nu}>0$. Άρα $f(x)>0$.

Επίσης $-3^{2015}\neq 0,\quad 3^{2017}\neq 0$, άρα $f\left(-3^{2015}\right)>2a^{\nu}$ και $f\left(3^{2017}\right)>2a^{\nu}$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη (όλοι οι όροι θετικοί) παίρνουμε:
$f\left(-3^{2015}\right)\cdot f\left(3^{2017}\right)>4a^{2\nu}$

Α2. $f(x)\geq 2a^{\nu}$ και το ίσο (=) ισχύει μόνο όταν χ = 0.

Για α = 1 και ν = 2014 έχουμε $f(x)=(1+x)^{2014}+(1-x)^{2014}=2$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=2$ με μοναδική λύση το χ = 0.

Α3. Αρκεί $g(x)>0 \Leftrightarrow f(5^{x^2})>f\left(1+\ln\left(1+x^2\right)\right)$ ή <u>αρκεί</u> $5^{x^2}>1+\ln\left(1+x^2\right)$

αφού 5^{x^2} *και* $1+\ln\left(1+x^2\right)$ είναι θετικοί όροι με την f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Έστω η συνάρτηση $\phi(x)=5^x-1-\ln(1+x)$ με χ $\geq$0.

φ συνεχής στο $[0,+\infty)$.

$\phi'(x)=5^x\ln 5-\dfrac{1}{1+x}$, $\phi''(x)=5^x\ln^2 5+\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$, άρα ϕ' γνησίως αύξουσα. Οπότε για χ>0 , $\phi'(x) > \phi'(0) = \ln 5 - 1 > 0$. Άρα $\phi'(x)$ >0 και ϕ γνησίως αύξουσα. Άρα για χ>0 , $\phi(x) > \phi(0) = 0$. Επομένως $\phi(x) > 0$ και επειδή $x^2 > 0$ αφού $x \neq 0$ θα είναι και $\phi(x^2) > 0$

$\Leftrightarrow 5^{x^2} > 1 + \ln\left(1 + x^2\right)$

Α4. Έστω η συνάρτηση κ(χ) = f(χ) – h(χ) ορισμένη στο διάστημα [1,2].

- κ είναι συνεχής στο [1,2].
- κ(1) = f(1) – 1 > 0 και κ(2) = f(2) – 10 < 0

 Άρα κ(1)κ(2) < 0 και σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (1,2)

Οπότε η κ(χ) = 0 έχει μία τουλάχιστον λύση x_0.

Και επειδή η κ είναι άρτια άρα και η κ ($D_\kappa = \Re$ **και** $\kappa(-x) = \kappa(x)$), θα έχει λύση και το $-x_0$. Άρα η κ(χ) έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

Θέμα Β

Β1. Αρκεί η επίλυση του συστήματος $\begin{cases} \psi = e^x \\ x + \psi + 1 = 0 \end{cases}$ να έχει μοναδική λύση.

Ισοδύναμα αρκεί η εξίσωση $e^x + x + 1 = 0$ να έχει μοναδική λύση.

Έστω η $g(x) = e^x + x + 1$ στο $\mathrm{A} = R$.

$g'(x) = e^x + 1$ > 0, g γνησίως αύξουσα και $g(\mathrm{A}) = \left(\lim_{X \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$ = R

Επειδή, g συνεχής , $0 \in g(A)$ άρα η g θα έχει μία λύση **ρ** η οποία είναι μοναδική λόγω μονοτονίας.

Β2. Έστω Α(α,β) τυχαίο σημείο της ευθείας **(ε).** Φέρνουμε την εφαπτομένη από το Α (αν υπάρχει) και έστω $\mathrm{M}(x_1, e^{x_1})$ το σημείο επαφής με την C_f.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Μ είναι:

$\psi - e^{x_1} = e^{x_1}(x - x_1)$ επειδή $\mathrm{A} \in (\varepsilon)$ θα ισχύει:

$\beta - e^{x_1} = e^{x_1}(a - x_1) \Leftrightarrow e^{x_1}(a + 1 - x_1) + a + 1 = 0$. Επομένως η ύπαρξη ή η μη ύπαρξη εφαπτομένων από το Α ανάγεται στη μελέτη του πλήθους των ριζών της εξίσωσης $e^x(a + 1 - x) + a + 1 = 0$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Θέτουμε $h(x) = e^x(a + 1 - x) + a + 1 \quad x \in R,\ \alpha \in R$.

$h'(x) = e^x(a + 1 - x) - e^x = e^x(\alpha - x)$ και $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$

χ	$-\infty$	α	$+\infty$
h'	+	0	-
h	$\nearrow$		$\searrow$

maxh= h(α) = e^{α} + α + 1 = $g(a)$

- Αν α < ρ τότε $g(a) < g(\rho) = 0$, οπότε $h(x) < 0$ και επομένως δεν υπάρχουν εφαπτόμενες από το Α προς την C_f.
- Αν α = ρ τότε $h(x) \le h(\rho) = 0$. Το Α είναι σημείο της C_f και μπορούμε να φέρουμε ακριβώς μία εφαπτομένη προς την C_f.
- Αν ρ < α < -1

  $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x(a+1-x)+a+1\right) = a+1$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, $h(a) = g(a) > 0$, $a+1<0$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, a): h(x_1) = 0$ και μοναδικό $x_2 \in (a, +\infty): h(x_2) = 0$. Στην περίπτωση αυτή από το Α άγονται δύο εφαπτόμενες προς την C_f.

- Αν $a \ge -1$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (a, +\infty): h(x_1) = 0$. Άρα από το Α άγεται μοναδική εφαπτομένη προς την C_f.

Άρα για να έχουμε δύο εφαπτόμενες από την (ε) στην γραφική παράσταση της f πρέπει το σημείο της ευθείας να έχει τετμημένη α στο (ρ,-1)

*** Από τον πίνακα μεταβολών και κάτω μπορεί να αντιμετωπιστεί η άσκηση και ως εξής:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
h'	+	0	-
h	↗		↘
	α + 1	maxh= h(α) = e^{α} + α + 1 = $g(a)$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x(a+1-x)+a+1] = a+1$ διότι:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(a+1-x) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a+1-x}{e^{-x}} \underset{D.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}} = 0$

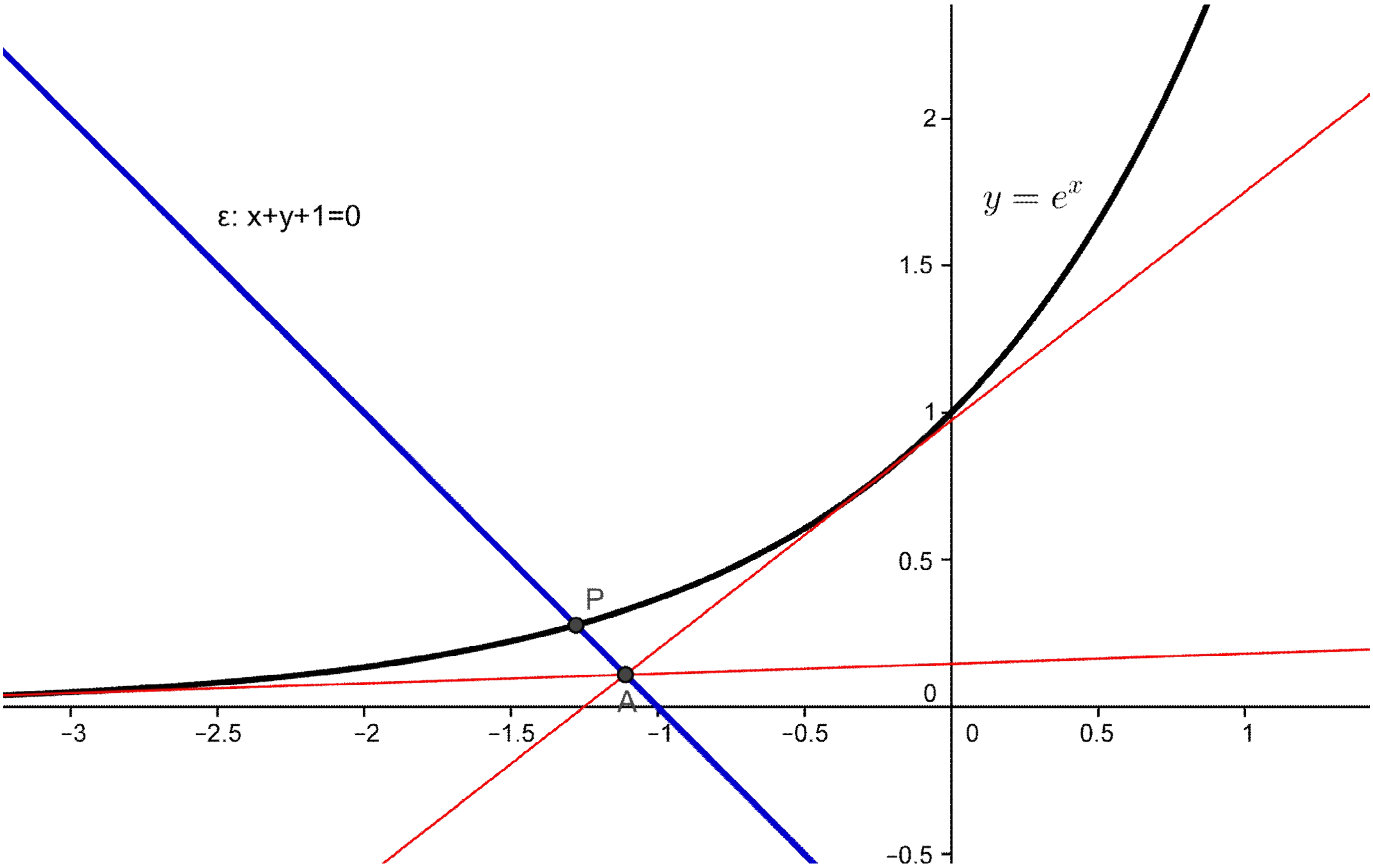
και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[e^x(a+1-x)+a+1] \overset{(+\infty)\cdot(-\infty)}{=} -\infty$

Για να έχει δύο ρίζες πρέπει και αρκεί g(α)>0 και α+1<0

Αν ρ η ρίζα της g από πρώτο ερώτημα έχουμε:

g(α) > 0

g(α) > g(ρ) (g γν. αύξουσα)
α > ρ
και α+1<0 ή α<-1 προφανώς ρ <-1 διότι
$g(-1)=e^{-1}>0$ και g γνησίως αύξουσα
Δηλαδή τελικά α ανήκει στο (ρ,-1)



Μπορείτε να δείτε το σχήμα της άσκησης με το λογισμικό geogebra εδώ