Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά   Τάξη: Γ΄

Δράμα 18 Μαρτίου 2018

Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις :

- $f: R \to R$ παραγωγίσιμη, με $f(R)=R$ για την οποία ισχύει:
  $2\cdot f(x)\left(1+f^2(x)\right)+673\cdot x=2019-\left(f^4(x)+f^2(x)+1\right)\cdot f(x)$ **(1)** για κάθε $x\in R$.
- $g:[-2,2]\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε.
  $f\left(g'(x)+g'(-x)+3\right)=0$ για κάθε $x\in[-2,2]$ και g(0) = 0.

Α1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Α2. Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και ότι η εξίσωση $f^{-1}\left(\ln\dfrac{(x+1)\cdot e^{-x}}{x-1}\right)=3$ έχει:

α. Μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ και

β. Δύο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

Α3. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]\right)$.

Α4. Να δείξετε ότι η g είναι άρτια και ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $g'(2)=2\cdot g''(2\cdot\xi)$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α1. Η εξίσωση **(1)** γίνεται: $2\cdot f(x)+2f^3(x)+673\cdot x=2019-f^5(x)-f^3(x)-f(x)\Leftrightarrow$

$$f^5(x)+3f^3(x)+3f(x)=-673\cdot x+2019\Leftrightarrow$$

$$f(x)\left(f^4(x)+3f^2(x)+3\right)=-673\cdot x+2019\overset{f^4(x)+3f^2(x)+3>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{-673\cdot x+2019}{f^4(x)+3f^2(x)+3}$$

Άρα $f(x)=0\Leftrightarrow -673\cdot x+2019=0\Leftrightarrow x=3$

Α2. Από τη σχέση $f^5(x)+3f^3(x)+3f(x)=-673\cdot x+2019$
με παραγώγιση έχουμε αντίστοιχα,

$$5f^4(x)f'(x)+9f^2(x)f'(x)+3f'(x)=-673\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left[5f^4(x)+9f^2(x)+3\right]=-673\Leftrightarrow \quad f'(x)=\frac{-673}{4f^4(x)+9f^2(x)+3}<0$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα είναι 1-1, οπότε ορίζεται η f^{-1}.

α. Έχουμε ισοδύναμα $f^{-1}\left(\ln\frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{x-1}\right)=3\Leftrightarrow$

$f\left(f^{-1}\left(\ln\frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{x-1}\right)\right)=f(3)\Leftrightarrow \ln\frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{x-1}=0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=\ln\frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{x-1}$, ορισμένη στο διάστημα $\left[\frac{3}{2},2\right]$.

- Η h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{3}{2},2\right]$
- h$\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(5\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)>0$ γιατί $5\cdot e^{-\frac{3}{2}}>1\Leftrightarrow 5>e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow 5^2>\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2\Leftrightarrow 25>e^3$ που ισχύει.

  h$(2)=\ln\left(3\cdot e^{-2}\right)<0$ γιατί $3\cdot e^{-2}<1\Leftrightarrow 3<e^2$ ισχύει.

  Οπότε $h\left(\frac{3}{2}\right)\cdot h(2)<0$, άρα από το θεώρημα Bolzano η h(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

β. Αν x_0 είναι η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $h(x_0)=0$.
Αρκεί να ισχύει $h(-x_0)=0$. Έχουμε ισοδύναμα.

$h(-x_0)=0\Leftrightarrow \ln\frac{(-x_0+1)\cdot e^{x_0}}{-x_0-1}=0\Leftrightarrow \ln\frac{(x_0-1)\cdot e^{x_0}}{x_0+1}=0\Leftrightarrow \ln\left[(x_0-1)\cdot e^{x_0}\right]-\ln(x_0+1)=0$

$\Leftrightarrow \ln\left[(x_0-1)\cdot e^{x_0}\right]=\ln(x_0+1)\Leftrightarrow \ln(x_0+1)-\ln[(x_0-1)e^{x_0}]=0\Leftrightarrow \ln\frac{(x_0+1)}{(x_0-1)e^{x_0}}=0$

$\Leftrightarrow \ln\frac{(x_0+1)\cdot e^{-x_0}}{x_0-1}=0\Leftrightarrow h(x_0)=0$ που ισχύει.

Α3. Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]\right)$, θέτω $u=1+\frac{1}{x}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$, άρα

$u\to 1$, $x=\frac{1}{u-1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{u\to 1}e^{\frac{\ln u}{u-1}}=e^1=e$ $\quad αφού \quad \lim\limits_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{u\to 1}\frac{\frac{1}{u}}{1}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]\right)=(+\infty)f(e)=(+\infty)$ $\quad \left(f\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ $συνεχής \quad και \quad e<3\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e)>f(3)=0$.

Α4. Ισχύει $f\left(g'(x)+g'(-x)+3\right)=0\Leftrightarrow f\left(g'(x)+g'(-x)+3\right)=f(3)$

$\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} g'(x)+g'(-x)+3=3\Leftrightarrow g'(x)+g'(-x)=0\Leftrightarrow g'(x)=-g'(-x)$

$\Leftrightarrow g'(x)=\left(g(-x)\right)'\Leftrightarrow g(x)=g(-x)+c$ και για χ = 0 προκύπτει c = 0.

Άρα $g(x)=g(-x)$ και D_g=[-2,2]. Άρα g είναι άρτια.

<u>1^{ος} τρόπος.</u>

Για τη συνάρτηση $\kappa(x)=g'(2x)-g'(2)\cdot x$ έχουμε:

- κ είναι συνεχής στο [0,1]
- κ είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) και μάλιστα $k'(x)=2g''(2x)-g'(2)$
- $\kappa(0)=\kappa(1)=0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\kappa'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(2)=2\cdot g''(2\cdot\xi)$.

<u>2^{ος} τρόπος.</u>

Για τη συνάρτηση g΄ έχουμε

- g΄ συνεχής στο [0,2]
- g΄ είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) αφού η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει $x_0\in(0,2)$ έτσι ώστε $g''(x_0)=\dfrac{g'(2)-g'(0)}{2-0}=\dfrac{g'(2)}{2}$.

Ισχύει $0<x_0<2 \Leftrightarrow 0<\dfrac{x_0}{2}<1$. Αν θέσω $\chi_0=2\xi$ τότε $0<\xi<1$ και ισχύει

$$g''(2\xi)=\frac{g'(2)}{2} \Leftrightarrow 2g''(2\xi)=g'(2)$$

<u>Θέμα Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^2}{2x^2+c}$, $c>0$, και $x\in R$.

Β₁. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών Β της g είναι ίδιο για κάθε $c>0$.

Β₂. Για την συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύουν οι ιδιότητες:

- Η συνάρτηση $\left(f(x)+2x\right)\in \mathrm{B}$ για κάθε $x\in R$ και
- $f(x)-2x$ είναι ακέραιος για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

i) $-1<f(f(x))-4x<\dfrac{1}{2}$ και $f(f(x))-4x$ είναι ακέραιος.

ii) $f(f(x))=4x$ για κάθε $x\in R$.

iii) $f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{1}{8}$.

iv) Η **f** δεν είναι συνεχής στο R.

<u>Λύση</u>

Β₁.

$$g'(x)=\frac{2x(2x^2+c)-4xx^2}{(2x^2+c)^2}=\frac{2xc}{(2x^2+c)^2}$$

	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
g	-	+
g'	↘	↗

$g(0)=0$

Με g_{min}= g(0) = 0, και το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+c}=\dfrac{1}{2}$

το σύνολο τιμών από τον παραπάνω πίνακα είναι B=[0, $\frac{1}{2}$).

B₂. **i)** Αφού $\left(f(x)+2x\right)\in B$ και $f\left(f(x)\right)+2f(x)\in$B για κάθε $x\in R$, έχουμε:

$$0\le f(x)+2x<\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}0\le f(f(x))+2f(x)<\frac{1}{2}\\ \text{και}\\ -1<-2f(x)-4x\le 0\end{cases}\quad \textit{οπότε με πρόσθεση κατα μέλη έχουμε}$$

$-1<f\left(f(x)\right)-4x<\frac{1}{2}$. **(1)** Επίσης

$$f(x)-2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left.\begin{cases}2f(x)-4x\in\mathbb{Z}\\ \text{και}\\ f(f(x))-2f(x)\in\mathbb{Z}\end{cases}\right\}\Rightarrow f(f(x))-4x\in\mathbb{Z}$$

ii) άρα από την σχέση **(1)** έχουμε ότι $f(f(x))-4x=0$ άρα $f(f(x))=4x$ για κάθε $x\in R$.

iii) Από $0\le f(x)+2x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -4x\le f(x)-2x<\frac{1}{2}-4x\Leftrightarrow -8x\le 2f(x)-4x<1-8x$.

όμως $2f(x)-4x$ είναι ακέραιος για κάθε $x\in R$ άρα για $x=\frac{1}{16}$ έχουμε ότι

$-8\frac{1}{16}\le 2f(\frac{1}{16})-4\frac{1}{16}<1-8\frac{1}{16}$ άρα $-\frac{1}{2}\le 2f(\frac{1}{16})-\frac{1}{4}<1-\frac{1}{2}$ άρα $-\frac{1}{2}\le 2f(\frac{1}{16})-\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

$2f(\frac{1}{16})-\frac{1}{4}=0$. Άρα $f(\frac{1}{16})=\frac{1}{8}$.

iv) Από $0\le f(x)+2x<\frac{1}{2}$ για $x=\frac{1}{4}$ έχουμε $0\le f(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ άρα $-\frac{1}{2}\le f(\frac{1}{4})<0$

Έστω ότι η f(x) είναι συνεχής στο R. Αφού $f(\frac{1}{16})f(\frac{1}{4})<0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o\in\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$ ώστε $f(x_o)=0$. Αφού $f(x)-2x$ είναι ακέραιος για κάθε $x\in R$ για $x=x_o$ έχουμε $f(x_o)-2x_o=-2x_o$ είναι ακέραιος άτοπο γιατί $-2x_o\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\right)\notin Z$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο R.