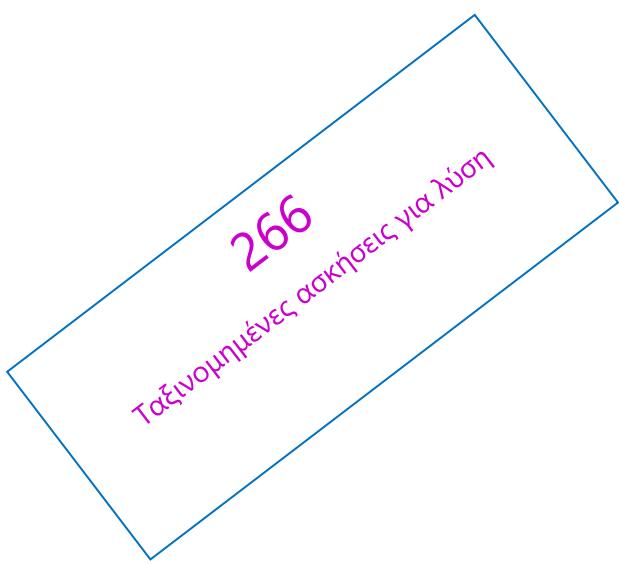


Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

2020-2021

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά



Σελίδα 3



Ταξη: Α Γενικού Λυκείου
Γεωμετρία
Έκδοση 20.08

Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά 2020

Ιστοσελίδα: <http://users.sch.gr/mipapagr>
mail : papagrigorakism@gmail.com

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- 2.01 Αν M είναι το μέσο τμήματος AB και O σημείο της ημιευθείας MA , να αποδείξετε ότι αν:
- Το O δεν ανήκει στο AM τότε $2OM=OA+OB$
 - Το O ανήκει στο AM τότε $2OM=OB-OA$

- 2.02 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB , BG , GD . Αν M , N είναι τα μέσα των AB και GD αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$MN = \frac{AD + BG}{2}$$

- 2.03 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα AB , BG , GD . Αν M , N είναι τα μέσα των τμημάτων AG και BD αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$MN = \frac{AD - BG}{2}$$

- 2.04 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα AB , BG . Αν Δ , E , Z είναι τα μέσα των AB , BG , GA αντίστοιχα, να δειχθεί ότι τα ΔE , BZ έχουν κοινό μέσο.

- 2.05 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία είναι $2AB=3AM$. Να δείξετε ότι: $3OM=OA+2OB$



- 2.06 Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία K, A, M και B ώστε $3AM=4MB$. Να δειχθεί ότι: $7KM=3KA+4KB$

- 2.07 Οι ημιευθείες OA , OB , OG , OD σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}G$, $G\hat{O}D$, $D\hat{O}A$ που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές και να δείξετε ότι οι ημιευθείες OB και OD είναι αντικείμενες.

2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΟΙΕΣ

- 2.08 Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία K, B, M και A ώστε $4BM=3MA$. Να δειχθεί ότι: $7KM=3KA+4KB$

- 2.09 Από σημείο O ευθείας AB φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της AB ημιευθείες OG , OD τέτοιες, ώστε οι γωνίες $A\hat{O}G$, $G\hat{O}D$, $D\hat{O}B$ να είναι εφεξής. Αν OE , OZ είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}G$, $D\hat{O}B$ αντίστοιχα και $(E\hat{O}Z)=1000$, να υπολογιστεί η γωνία $G\hat{O}D$.

- 2.10 Δίνεται κυρτή γωνία $A\hat{O}G$ και εσωτερική ημιευθεία της OB τέτοια, ώστε η διαφορά γωνιών $A\hat{O}G$ και $A\hat{O}B$ να είναι 900 . Αν OE , OZ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}G$ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι $(E\hat{O}Z)=45o$.

- 2.11 Θεωρούμε αμβλεία γωνία $x\hat{O}y$ και τις ημιευθείες OA , OB με $OA\perp Ox$ και $OB\perp Oy$ που περιέχονται στη $x\hat{O}y$. Να δειχτεί ότι οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $A\hat{O}B$ έχουν την ίδια διχοτόμο και είναι παραπληρωματικές.

- 2.12 Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}G$, $G\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μέτρων μικρότερο των $180o$. Αν Ox, Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $G\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: $x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}B + B\hat{O}G}{2}$

- 2.13 Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας φ αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των μέτρων της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής γωνίας της φ είναι ίσο με το εφταπλάσιο του μέτρου της γωνίας φ .

3 TRIGΩΝΑ

3.01 Δύο ισοσκελή τρίγωνα ABG και $AB'G'$ με κορυφή το A έχουν τις γωνίες BAG και $B'AG'$ ίσες. Να δειχτεί ότι $BB'=GG'$ ή $BG'=B'T$.

3.02 Έστω τρίγωνο ABG και η ημιευθεία Ax διχοτόμιος της γωνίας A . Στην Ax παίρνουμε σημεία K και Λ ώστε να είναι $AK=AB$ και $A\Lambda=A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι οι γωνίες $A\Gamma K$ και $A\Lambda B$ είναι ίσες και ότι $\Gamma K=B\Lambda$

3.03 Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABG . Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB , BG , GA προς τα B , G , A αντίστοιχα παίρνουμε σημεία Δ, E, Z ώστε $B\Delta=G\Delta=AZ$. Δείξτε ότι το ΔEZ είναι ισόπλευρο

3.04 Δίνεται η οξεία γωνία XOY . Κατασκευάζουμε τις ορθές γωνίες XOZ και YOT ώστε η κάθε μία από αυτές να περιέχει την γωνία XOY . Επί των OX και OZ παίρνουμε δύο ίσα τμήματα OM και ON και επί των OY και OT παίρνουμε δύο ίσα τμήματα OP και OQ . Να αποδειχτεί ότι οι γωνίες OPN και OQM είναι ίσες.

3.05 Δίνεται τρίγωνο ABG και δύο ίσες γωνίες BAH και GAH που κάθε μία τους είναι εφεξής με την γωνία A . Στις ημιευθείες AH και AH' παίρνουμε τα σημεία B' και G' ώστε να είναι $AB'=AB$ και $AH'=AH$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BG'=GB'$.

3.06 Στις πλευρές AB , BG , GA ενός ισοπλεύρου τριγώνου ABG παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, E, Z ώστε να είναι $A\Delta=B\Delta=ZG$. Να δείξτε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

3.07 Δύο ίσα ευθ. τμήματα AB και GD τέμνονται στο K ώστε να είναι $KA \leq KB$ και $KG \leq KD$. Αν είναι $A\Delta=B\Gamma$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta K$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα.

3.08 Στις πλευρές OX , OY γωνίας XOY παίρνουμε τα σημεία A , A' και B , B' αντίστοιχα ώστε να είναι $OA=OB$ και $OA'=OB'$. Αν M είναι σημείο της διχοτόμου της τότε οι γωνίες AMA' και BMB' είναι ίσες.

3.09 Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο η βάση BG είναι μικρότερη από την πλευρά AB . Στην προέκταση της πλευράς AB προς το B παίρνουμε τμήμα $B\Delta=AB-BG$ και στην προέκταση της πλευράς BG προς το G παίρνουμε τμήμα $\Gamma E=B\Delta$. Να αποδείξετε ότι
 A) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
 B) η γωνία $A\Delta E$ ισούται με τη ημιάθροισμα των γωνιών BAG και $AE\Delta$.

3.10 Δίνονται δύο ίσες οξείες γωνίες BAG και ΔAE οι οποίες έχουν κοινή την κορυφή A και κοινή την γωνία ΔAG . Επί των $A\Delta$ και $A\Gamma$ παίρνουμε ίσα ευθ. τμήματα $AM=AN$ και επί των AB και AE παίρνομε δύο ίσα ευθ. τμήματα $AP=AS$. Να αποδειχτεί ότι $MP=NQ$.

3.11 Να αποδειχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα ABG και $A'B'G'$ που έχουν $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ και $\mu\beta=\mu\beta'$ είναι ίσα.

3.12 Στις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου ABG παίρνουμε αντίστοιχα δύο σημεία $B\Gamma$ και ΓD τέμνονται στο M . Να δείξετε ότι
 A) Τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και ΔEM είναι ισοσκελή
 B) Η ημιευθεία AM είναι διχοτόμος της γωνίας A .

3.13 Δίνεται μια γωνία XOY . Στην πλευρά OX παίρνουμε τα τμήματα OA , OB και στην πλευρά OY παίρνουμε τμήματα $OA'=OA$ και $OB'=OB$. Οι ευθείες BA' και $B'A$ τέμνονται στο G . Να αποδειχτεί ότι η $O\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας XOY .

3.14 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΔABC , ($AB=AC$), και οι διχοτόμοι των γωνιών B και C που τέμνονται στο M . Αν Δ και E είναι τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα, δείξτε ότι $M\Delta=ME$.

3.15 Έστω ένα τρίγωνο ΔABC με $AB>AC$. Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε σημείο G' ώστε $AG'=AC$ και στην προέκταση της πλευράς CA προς το C σημείο B' ώστε $AB'=BC$. Οι ευθείες BG' και CG' τέμνονται στο Δ . Να δειχτεί ότι:

- A) Το τρίγωνο $\Delta G'GC$ είναι ισοσκελές.
- B) Η διχοτόμος της γωνίας $\angle C$ διέρχεται από το A

3.16 Έστω M το μέσο ενός ευθ. τμήματος AB . Στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που είναι φορέας του AB παίρνουμε τα σημεία K και L ώστε να είναι $AK=BL$ και $MK=ML$. Να αποδειχτεί ότι οι γωνίες AKB και BAL είναι ίσες.

3.17 Έστω μία κυρτή γωνία XOY . Στην πλευρά της OX παίρνουμε δύο σημεία A και B και στην πλευρά της OY δύο σημεία A' και B' ώστε να είναι $OA=OA'$ και $OB=OB'$. Αν είναι Γ το σημείο τομής των AB και BA' να αποδειχτεί ότι τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma A'B'$ είναι ίσα και ότι οι γωνίες $O\Gamma A$ και $O\Gamma A'$ είναι ίσες.

3.18 Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , AC τριγώνου ΔABC προς το μέρος του A παίρνουμε τμήματα $AB'=AB$ και $AC'=AC$ αντίστοιχως. Να δειχτεί ότι ο φορέας της διάμεσους AM του τριγώνου ΔABC διέρχεται από το μέσον του $B'C'$

3.19 Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΔABC και $\Delta A'B'C'$. Η διάμεσος AM και η διχοτόμος $B'D$ του τριγώνου ΔABC τέμνονται στο Θ , ενώ η αντίστοιχη διάμεσος $A'M'$ και η αντίστοιχη διχοτόμος $B'D'$ του τριγώνου $\Delta A'B'C'$ τέμνονται στο Θ' . Να αποδείξετε ότι $\Theta D=\Theta'D'$ και $\Theta M=\Theta'M'$.

3.20 Να αποδεχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα ΔABC και $\Delta A'B'C'$ που έχουν $\beta=\beta'$, $\delta=\delta'$ και τις γωνίες τους A και A' ίσες, είναι ίσα.

3.21 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΔABC και στις ίσες πλευρές AB και AC τα σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta=AE$. Αν O είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της διχοτόμου AD (όχι συνευθειακό με τα Δ και E) και οι ευθείες AO και EO τέμνουν την ευθεία BC στα Z και H αντίστοιχα, Να αποδείξετε ότι $BZ=GH$ [ή $BH=HZ$].

3.22 Έστω ένα τετράπλευρο $\Delta ABCD$ με $AD=BC$ και τις γωνίες Δ και C ίσες. Να αποδειχτεί ότι θα είναι ίσες και οι γωνίες A και B .

3.23 Στις πλευρές OX και OY μιας γωνίας XOY παίρνουμε δύο ίσα ευθ. τμήματα $OA=OB$. Στο εσωτερικό της γωνίας XOY φέρνουμε τις ημιευθείες OZ και OT έτσι ώστε να σχηματίζονται δύο ίσες γωνίες XOZ και YOT που η κάθε μια από αυτές να είναι μικρότερη από το ήμισυ της γωνίας XOY . Στις OZ και OT παίρνουμε δύο ίσα ευθ. τμήματα $OM=ON$. Οι AN και BM τέμνονται στο P . Να αποδειχτεί ότι

- A) τα τρίγωνα PAM και PBN είναι ίσα και
- B) Το P βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας XOY

3.24 Σε τρίγωνο ΔABC φέρνουμε τις AX , AY κάθετες στις AB , AC αντίστοιχα ώστε οι γωνίες ΓAY , BAZ να περιέχουν την γωνία A . Στις AX , AY παίρνουμε σημεία Δ, E ώστε $A\Delta=AB$, $AE=AC$ αντίστοιχα. Αν Θ, Z είναι τα μέσα των BE , ΓD να δειχτεί ότι $EB=\Gamma D$ και $AZ=\Theta D$

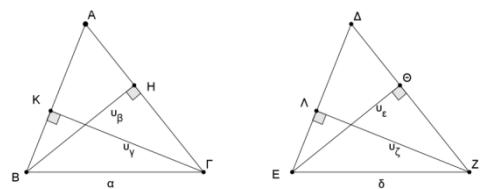
3.25 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΔABC , ($AB=AC$) προεκτείνουμε την BC κατά τμήματα $B\Delta=GE$. Αν M, N είναι τα μέσα των AB , AC , ν' αποδειχτεί ότι $\Delta N=EM$.

3.26 Στις πλευρές AB , BC , CA ισοπλεύρου τριγώνου ΔABC παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta=BE=HZ$ αντίστοιχα. Αν K, L, M είναι τα σημεία τομής των AE , ΓD , BZ ανά δύο ν' αποδειχτεί ότι το τρίγωνο KLM είναι ισόπλευρο

3.27 Δίνονται δυο οξυγώνια τρίγωνα ΔABG και ΔEZ , για τα οποία ισχύουν: $\alpha = \delta$, $v_\beta = v_\epsilon$ και $v_\gamma = v_\zeta$:

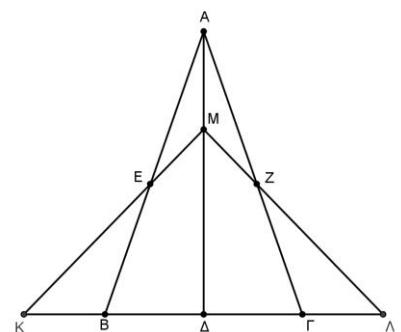
Να αποδειχθούν:

- Τα τρίγωνα BHG , $E\Theta Z$ είναι ίσα.
- Τα τρίγωνα ABG και ΔEZ , είναι ίσα.



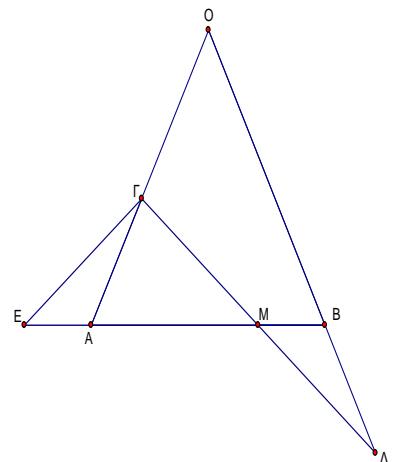
3.28 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$ και τυχαίο σημείο M της διαμέσου του $A\Delta$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο E και στην πλευρά AG σημείο Z , τέτοια ώστε $AE = AZ$. Αν οι ME , MZ τέμνουν την BG στα K , L αντίστοιχα, να αποδείξετε τα επόμενα:

- Τα τρίγωνα AME και AMZ είναι ίσα.
- $BK = GL$
- $KG = BL$



3.29 Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB$) και Γ ένα σημείο της πλευράς OA . Προεκτείνουμε την πλευρά OB κατά τμήμα $B\Delta = A\Gamma$. Το τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει την AB στο M . Προεκτείνουμε και την BA κατά τμήμα $AE = BM$. Να αποδείξετε ότι:

- $GE = MD$ και $\hat{G}EA = \hat{B}MD$
- Το τρίγωνο GME είναι ισοσκελές
- $MG = MD$.

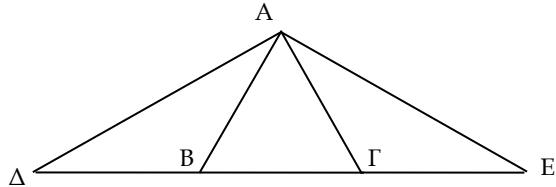


ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

3.30 Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\Delta B = AB = AG = GE$.

Να αποδειχθούν:

- A) $AD = AE$.
- B) Τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τις ευθείες AB και AG αντίστοιχα.
- Γ) Αν οι κάθετες από τα Δ και Ε προς τις AB και AG αντίστοιχα τέμνονται στο M να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\angle A$



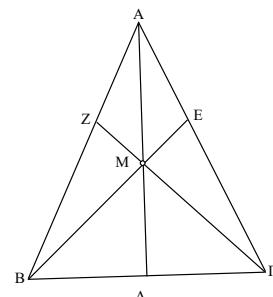
3.31 Εστω ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$, Δ το μέσο της βάσης BG . Από το Δ φέρνουμε τη $AE \perp AB$

και $\Delta Z \perp AG$. Να αποδείξετε ότι:

- A. $\Delta Z = \Delta E$
- B. $AZ = AE$
- Γ. $BZ = \Delta EG$
- Δ $AD \perp EZ$

3.32 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG , ($AB = AG$). Αν M τυχαίο σημείο της διχοτόμου AD της γωνίας A και E , Z τα σημεία τομής των BM και GM με τις πλευρές AG και AB αντίστοιχα, να δείξετε ότι

- A) $\Gamma Z = BE$
- B) $AZ = AE$ και $BZ = GE$
- Γ) η AM διέρχεται από το μέσο του τμήματος ZE



3.33 Στις ίσες πλευρές AB , AG ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε τα σημεία Δ , E ώστε να είναι $AD = AE$. Να δειχτεί ότι τα Δ , E ισαπέχουν από τη BG και από τα άκρα της.

3.34 Να αποδειχτεί ότι στις ίσες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσα ύψη.

3.35 Ν' αποδειχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα ABG και $A'B'G'$ είναι ίσα όταν έχουν $\alpha = \alpha'$, $v_\beta = v_{\beta'}$, $v_\gamma = v_{\gamma'}$

3.36 Ν' αποδειχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα ABG και $A'B'G'$ είναι ίσα όταν έχουν $\alpha = \alpha'$, $v_\alpha = v_{\alpha'}$, $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$

3.37 Στην ημιευθεία AD της διχοτόμου τριγώνου ABG Παίρνουμε τα σημεία E και Z , έτσι ώστε $AB = AE$ και $AG = AZ$. Να αποδείξετε ότι $BZ = GE$.

3.38 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και από το μέσο του M φέρνουμε τυχαία ευθεία (ε) . Αν $AK \perp (\varepsilon)$ και $BL \perp (\varepsilon)$ να αποδείξετε ότι $AL = BK$

3.39 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG και τα εσωτερικά σημεία του M, N της BG τέτοια ώστε $BM=GN$.

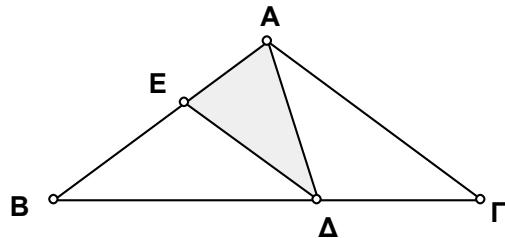
Αν K, Λ οι προβολές των B, G στις AM, AN αντίστοιχα να δείξετε ότι το $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές

3.40 Έστω τρίγωνο ABG με $AB = AG < BG$. Στην ημενθεία

BG θεωρούμε το σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta=BA$ και στην ημενθεία

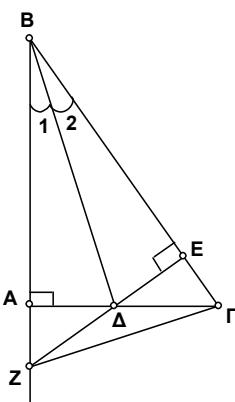
BA το σημείο E τέτοιο ώστε $BE=GE$. Αποδείξτε ότι:

- A) Τα Τρίγωνα $BE\Delta$ και $A\Delta G$ είναι ίσα
- B) Το Τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- C) $B\hat{A}\Delta - G\hat{A}\Delta = A\hat{A}E$



3.41 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABG , ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του BG . Από το Δ

φέρουμε ΔE κάθετη στη BG , που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι το Τρίγωνο BGZ είναι ισοσκελές.

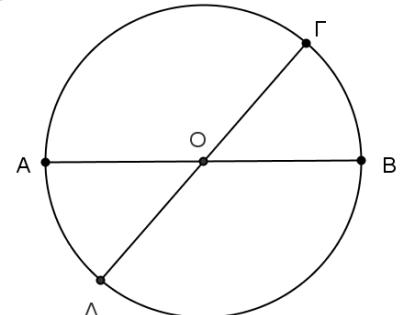
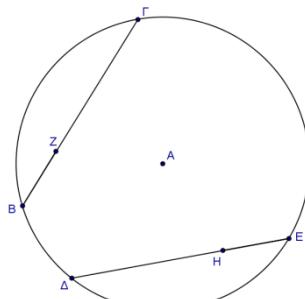


3.42 Έστω κύκλος κέντρου A και δύο ίσες χορδές του BG και ΔE .

Στις BG και ΔE παίρνουμε σημεία Z και H ώστε $BZ=EH$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- A) $AZ=AH$
- B) οι γωνίες AZB και AHE είναι ίσες
- C) Η απόσταση του σημείου G από την AZ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Δ από την AH

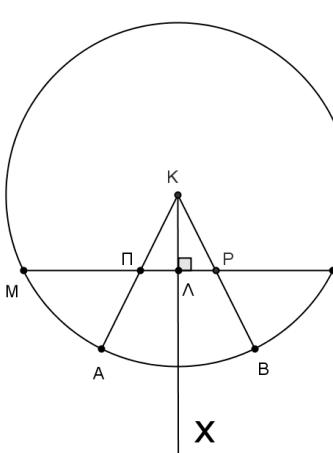


3.43 Στο σχήμα οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι διάμετροι του κύκλου

και O το κέντρο του.

Να αποδείξετε ότι:

- A) Τα σημεία A και B ισαπέχουν από την $\Gamma\Delta$
- B) Οι χορδές AG και $B\Delta$ έχουν ίσα αποστήματα



3.44 Στο σχήμα η KX είναι διχοτόμος της

γωνίας AKB και MN είναι κάθετη στην KX . Το K είναι το κέντρο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

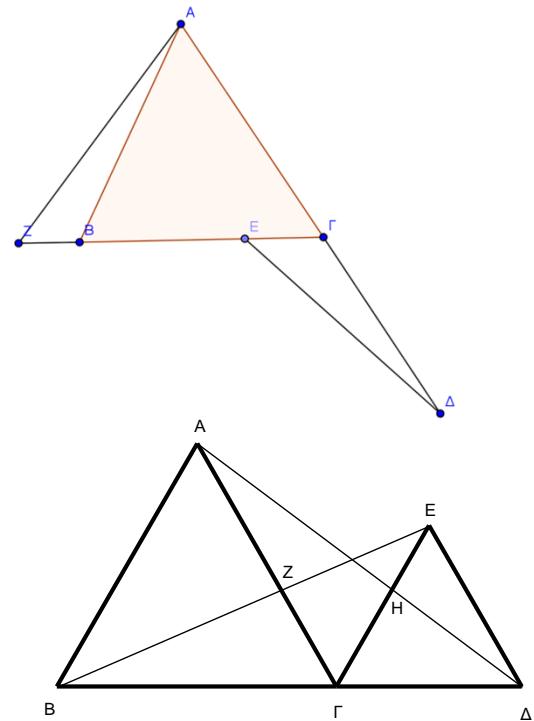
- A) $PA=PB$
- B) $MP=PN$
- C) $MA=NB$

3.45 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΔABC . Στην προέκταση της AC προς το G παίρνουμε τμήμα $GD=AG$. Έστω E τυχαίο σημείο της πλευράς BC και Z σημείο της προέκτασης της GB προς το B ώστε $BZ=GE$.

- A Να αποδειχτεί ότι $\Delta E=AZ$.
- B Αν η προέκταση του DE τέμνει την AZ στο H , να δειχτεί ότι το τρίγωνο HZE είναι ισοσκελές.
- Γ Αν $\hat{A} = 20^\circ$ να υπολογιστεί η γωνία $Z\hat{H}E$.

Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ισόπλευρα τρίγωνα ΔABC και ΔAED όπου τα σημεία B, G και D είναι συνευθειακά. Αν το τμήμα BE τέμνει την πλευρά AD στο σημείο Z και το τμήμα AE τέμνει την πλευρά ED στο σημείο H .

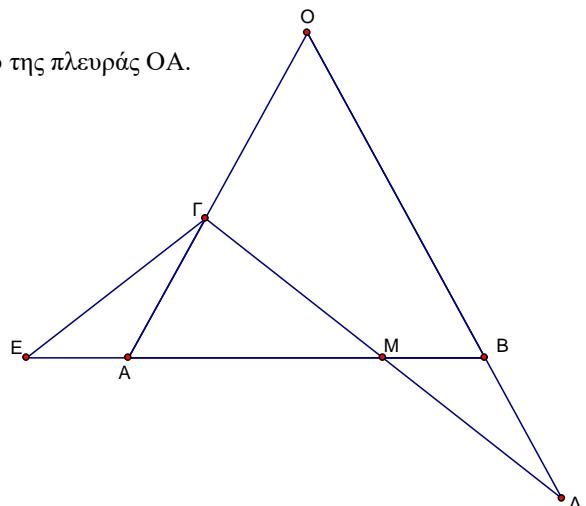
- A Να αποδείξετε ότι η γωνία $AZE = 60^\circ$.
- B Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔBEG και ΔAHD είναι ίσα.
- Γ Να γράψετε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ισότητα των τριγώνων ΔBEG και ΔAHD .
- Δ Να αποδείξετε ότι $BZ = AH$.



3.46 Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB$) και G ένα σημείο της πλευράς OA . Προεκτείνουμε την πλευρά OB κατά τμήμα $B\Delta = AG$.

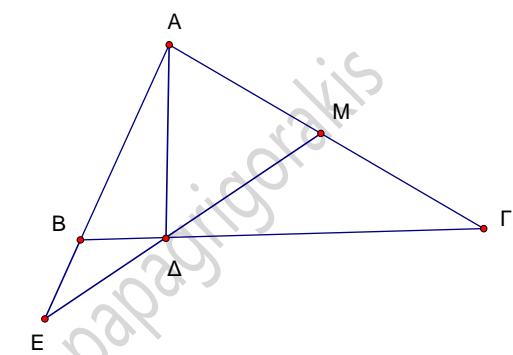
Το τμήμα GD τέμνει την AB στο M . Προεκτείνουμε και την BA κατά τμήμα $AE = BM$. Να αποδείξετε ότι:

- A) $GE = MD$ και $\hat{G}EA = \hat{B}MD$
- B) Το τρίγωνο GME είναι ισοσκελές
- Γ) $MG = MD$.



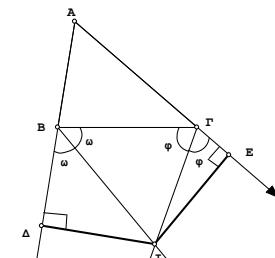
3.47 Δίνεται οξυγόνιο τρίγωνο ABC όπου $B = 2\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος AD . Προεκτείνουμε την AB προς το B και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $BE = BD$. Προεκτείνουμε το τμήμα ED που τέμνει την πλευρά AC στο M . Να αποδείξετε ότι:

- A) $ABD = 2 BDE$
- B) Το M είναι μέσο της AC .

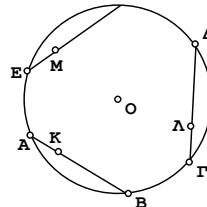


3.48 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο I και έστω ότι $IA \perp AB$ και $IE \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- a) $IA = IE$
- b) Η διχοτόμος της γωνίας A διέρχεται από το σημείο I .

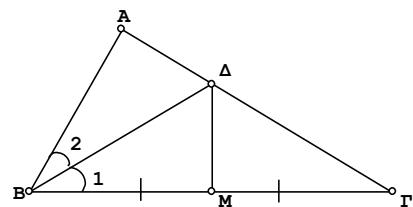


3.49 Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τρεις χορδές $AB = \Gamma\Delta = EZ$ και τα σημεία τους K, Λ, M έτσι ώστε $AK = \Gamma\Lambda = EM$. Δείξτε ότι τα K, Λ, M ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το O .



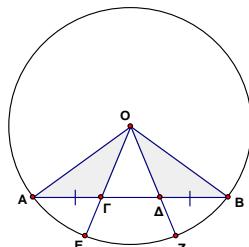
3.50 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = 2\Gamma$ και $B\Gamma = 2AB$. Αν $B\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου και M το μέσο της $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

- i) το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές ii) $\Delta M \perp B\Gamma$
- iii) τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $\Delta B M$ είναι ίσα
- iv) $A = 90^\circ$ v) $A\Delta < \Delta\Gamma$



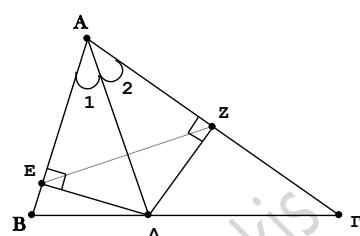
3.51 Στη χορδή AB του κύκλου (O, R) παίρνουμε τα σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε $A\Gamma = B\Delta$. Αν οι $OG, O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία E, Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- a) Τα τρίγωνα OAG και $OB\Delta$ είναι ίσα.
- b) $\Gamma E = \Delta Z$
- c) $AE = ZB$

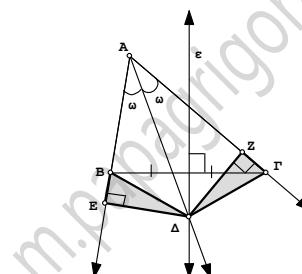


3.52 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

- a) Το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.
- b) $A\Delta \perp EZ$



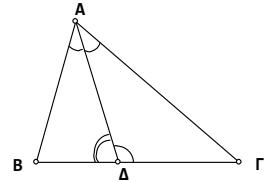
3.53 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας A η οποία τέμνει τη μεσοκάθετη της $B\Gamma$ στο Δ . Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $EB\Delta$ και $Z\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

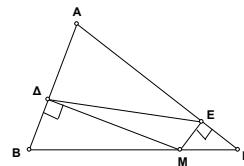
3.54 Σε τρίγωνο ABG φέρνουμε τη διχοτόμο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- A) $A\Delta G > \frac{1}{2}A$ B) $A\Gamma > A\Delta$
 Γ) Αν επιπλέον είναι $AB < A\Gamma$ τότε $B\Delta < \Delta\Gamma$



3.55 Δίνεται τρίγωνο ABG και τυχαίο σημείο M της πλευράς BG . Αν Δ και E είναι οι προβολές του M στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

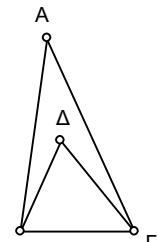
- A) $M\Delta < BM$ και $ME < MG$ B) $\Delta E < B\Gamma$ Γ) $M\Delta + ME < AB + A\Gamma$



3.56 Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Gamma < \hat{\Delta}$

3.57 Δίδεται τρίγωνο ABG με $AB < A\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Να αποδείξετε ότι

- A) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$ B) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_a < \frac{\beta + \gamma}{2}$



3.58 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABG ($\hat{A} = 90^\circ$) Η διχοτόμος της γωνίας \hat{G} τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδειχθεί ότι $A\Delta < \Delta B$.

3.59 Στις κάθετες πλευρές AB , AG ορθογώνιου τριγώνου ABG θεωρούμε τα σημεία Δ, E αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι: A) $\Delta E < EB$ B) $\Delta E < B\Gamma$.

3.60 Δίδεται τμήμα AB , σημείο P της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ϵ που διέρχεται από το A .

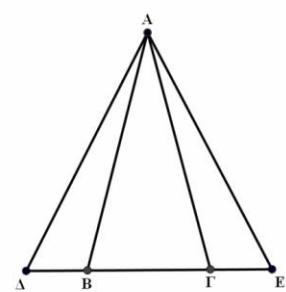
- A) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του P από την ευθεία ϵ και το σημείο B .
 B) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ϵ , ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

3.61 Δίνεται τρίγωνο ABG με $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία Δ, E στις AB , AG αντίστοιχα έτσι ώστε: $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι: A) $\Delta E < B\Gamma$ B) $BE < \Gamma\Delta$.

3.62 Έστω M , σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας xOy . Φέρνουμε MA κάθετη στην Ox , η οποία τέμνει την Oy στο B . Να αποδείξετε ότι $MA < MB$

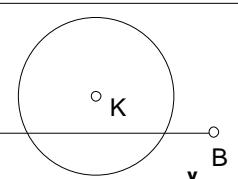
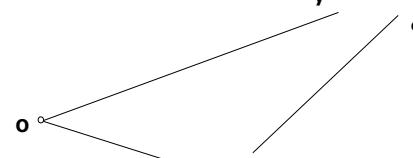
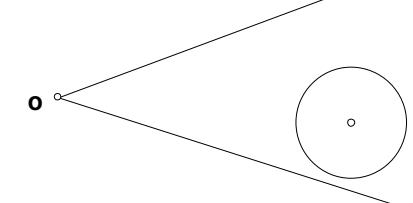
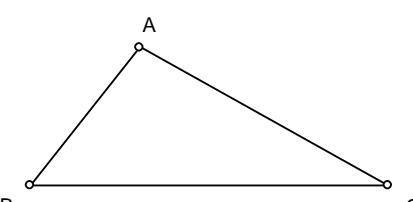
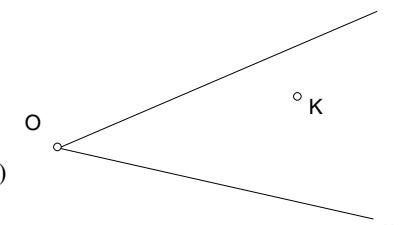
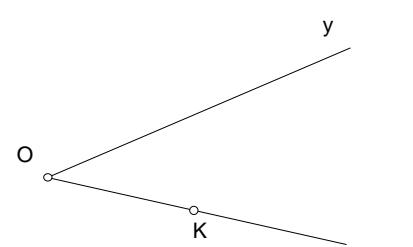
3.63 Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ABG και $A\Delta E$ είναι ισοσκελή

- A. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
 B. Αν M είναι το μέσο της AG και N το μέσο της AB , να δείξετε ότι: $AM = EN$.
 Γ. Αν τα τμήματα ΔM και EN τέμνονται στο σημείο K , να δείξετε ότι το τρίγωνο $K\Delta E$ είναι ισοσκελές.



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

3.64 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο που έχει την ιδιότητα που περιγράφεται σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

- A)  Ισαπέχει από τα σημεία Γ και Δ και βρίσκεται στην ευθεία ϵ
- B)  Ισαπέχει από τα σημεία A και B και βρίσκεται στον κύκλο κέντρου K
- Γ)  Ισαπέχει από τις τεμνόμενες ευθείες Ox και Oy και βρίσκεται στην ευθεία ϵ
- Δ)  Ισαπέχει από τις τεμνόμενες ευθείες Ox και Oy και βρίσκεται στον κύκλο
- E)  Ισαπέχει από τις κορυφές B και C και ανήκει στην AG
- ΣΤ)  Ισαπέχει από τις τεμνόμενες ευθείες Ox και Oy και απέχει από το K 1cm
- Z)  Ισαπέχει από το σημείο K της Ox και την ευθεία Oy και ανήκει στην ευθεία Ox

ΤΡΙΓΩΝΑ - ΚΥΚΛΟΣ

3.65

Δίνονται δύο κύκλοι Κ και Λ που εφάπτονται εξωτερικά στο Α και η κοινή εξωτερική εφαπτομένη ΒΓ. Η κοινή εφαπτομένη στο Α τέμνει την ΒΓ στο Δ. Αποδείξτε ότι: A) $\Delta B = \Delta \Gamma$
B) Γωνία $K\Delta\Lambda = 90^\circ$
Γ) Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ εφάπτεται στην ΚΛ

3.66 Σε κύκλο (O,ρ) θεωρούμε χορδή ΑΒ δύο σημεία Γ και Δ αυτής τέτοια ώστε $A\Gamma = B\Delta$. Να αποδειχθούν: A) $O\Delta\Gamma = O\Gamma\Delta$ B) $O\Gamma = O\Delta$
Γ) Τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τις ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα

3.67 Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα Α και Β. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΒΛ έχει ίσες πλευρές

3.68 Δύο κύκλοι (K,ρ) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά. Φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες ΑΑ' και ΒΒ' που τέμνονται στο Ρ. Να δείξετε ότι $AA' = BB'$.

3.69 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΚ. Αν η $BH \perp AK$ τέμνει την AG στο Θ να δείξετε ότι $BKA = \hat{AK}\Theta$

3.70 Να αποδείξετε ότι αν το μέσο μιας πλευράς τριγώνου ισαπέχει από τις άλλες πλευρές του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

3.71 Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τρεις χορδές $AB = \Gamma\Delta = EZ$ και τα σημεία τους K, Λ, M έτσι ώστε $AK = \Gamma\Lambda = EM$. Δείξτε ότι τα K, Λ, M ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το O .

3.72 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες R και r με $R > r$ αντίστοιχα. Μια ευθεία τέμνει και τους δύο κύκλους στα σημεία A, Δ τον ένα και στα B, Γ τον άλλο. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$

3.73 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες R και r με $R > r$ αντίστοιχα. Φέρουμε δύο χορδές του μεγαλύτερου κύκλου, οι οποίες εφάπτονται στον μικρότερο. Να αποδείξετε ότι οι χορδές είναι ίσες

3.74 Θεωρούμε τους ίσους κύκλους (O,ρ) και (O',ρ) και ευθεία ε που διέρχεται από το μέσο Μ του OO' και τέμνει τους κύκλους (O,ρ) και (O',ρ) στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$

3.75 Αν δύο ίσες χορδές AB , $\Gamma\Delta$ τέμνονται εκτός κύκλου στο K , να αποδείξετε ότι $KB = K\Delta$ και $KA = K\Gamma$

3.76 Αν δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O,ρ) τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο E και είναι $O\hat{E}A = O\hat{E}\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$

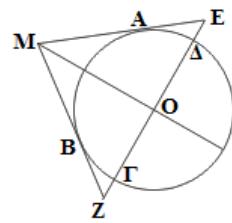
3.77 Δίνεται κύκλος (O,ρ) και σημεία A, B εσωτερικά του έτσι ώστε $OB = 2OA$. Οι OB , OA τέμνουν τον κύκλο στα Λ, K αντίστοιχα. Αν N μέσο του τόξου $K\Lambda$ και M μέσο του OB να αποδείξετε ότι $ON \perp AM$

3.78 Σε ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$) προεκτείνουμε τη βάση BG προς το μέρος του B παίρνοντας τμήμα $B\Delta = AB$ και προς το μέρος του G παίρνοντας τμήμα $\Gamma E = AG$. Στη συνέχεια φέρνουμε τις διχοτόμους BK (K σημείο της $A\Delta$) και $\Gamma\Lambda$ (Λ σημείο της AE) των εξωτερικών γωνιών $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ αντίστοιχα του τριγώνου, οι οποίες τέμνονται στο σημείο M . Αποδείξτε ότι:

- A) Το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές
- B) Οι κύκλοι (A, AB) και (B, BG) τέμνονται

- 3.79 Από σημείο M φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB προς κύκλο (O, R) και την διάμετρο $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετη στην MO . Αν οι MA και MB τέμνουν την $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

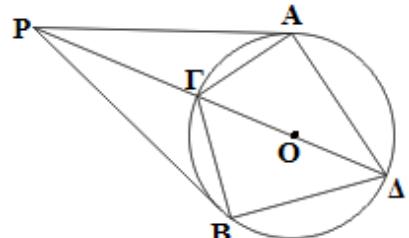
- α)** $AE = BZ$ **β)** $E\Delta = \Gamma Z$.



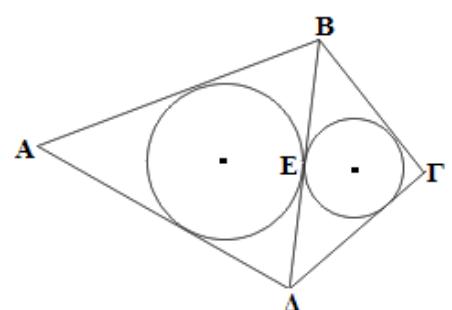
- 3.80 Από σημείο P φέρνουμε εφαπτόμενες PA και PB

προς κύκλο O και την διακεντρική ευθεία PO που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ .

Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα.



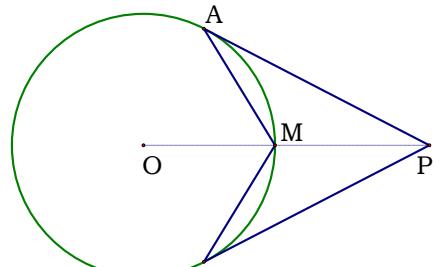
- 3.81 Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο E . Φέρουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη και από δύο σημεία της B και Δ που βρίσκονται εκατέρωθεν του E φέρουμε τις εξωτερικές εφαπτόμενες στους δύο κύκλους που τέμνονται στα A και Γ . Να δείξετε ότι το άθροισμα των δύο απέναντι πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του.



- 3.82 Από το εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, R) φέρνουμε εφαπτόμενες PA και PB . Αν M είναι το σημείο που η OP τέμνει τον κύκλο να αποδείξετε ότι

α. $AM = BM$

β. $\hat{M}AP = \hat{M}BP$



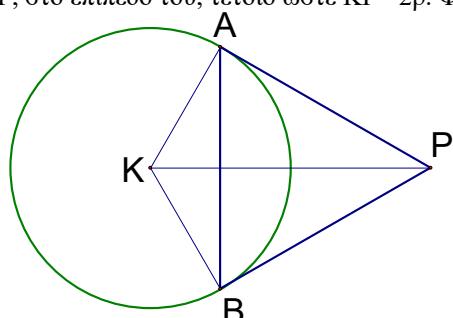
- 3.83 Έστω (K, ρ) κύκλος και σημείο P , στο επίπεδό του, τέτοιο ώστε $KP = 2\rho$. Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB .

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{A}PK = 30^\circ$

β. $\hat{A}KB = 120^\circ$

γ. το PAB είναι ισόπλευρο



- 3.84 Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα r . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και G αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

B1. Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.

B2. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.



4 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

4.01 Στα σημεία A και B ευθείας ε φέρνουμε τις Ax , By παράλληλες μεταξύ τους και προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ε. Αν M τυχαίο σημείο «μεταξύ « των Ax, By να αποδειχτεί ότι η γωνία AMB ισούται με το άθροισμα των γωνιών xAM και yBM.

4.02 Από τα άκρα ευθ. Τμήματος AB φέρνουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο τις παράλληλες Ax και By. Στο AB παίρνουμε σημείο Γ , στην Ax τμήμα ΑΔ=ΑΓ και στην BY τμήμα BE=ΓΒ. Ν' αποδειχτεί ότι η γωνία ΔΓΕ είναι ορθή.

4.03 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους BM και GN. Προεκτείνουμε τη BM κατά τμήμα MΔ, ώστε BM=MΔ και τη GN κατά τμήμα NE ώστε GN=NE. Να αποδείξετε ότι :

- A) ΑΔ//ΒΓ B) EA//ΒΓ
Γ) Τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.

4.04 Να αποδείξετε ότι αν η διχοτόμος εξωτερικής γωνίας τριγώνου είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αντίστροφα.

4.09 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ , (AB=BG), η διάμεσος AM και ένα σημείο H της διαμέσου. Στο H φέρνουμε κάθετη προς την AM που τέμνει την AB στο E και την AG στο Z. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

4.10 Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ φέρνουμε την εσωτερική διχοτόμο Αδ και τη διχοτόμο Αε της εξωτερικής γωνίας A. Από το B φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τις Αδ και Αε αντίστοιχα οι οποίες τέμνουν την ευθεία AG στα σημεία Δ και E. Να δείξετε ότι:

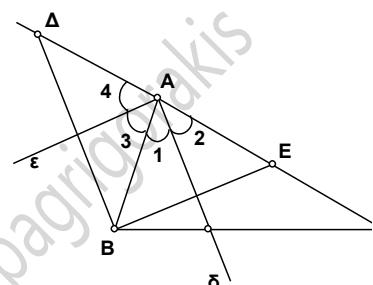
- A) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή
B) $AD = AB = AE$ C) $AE \perp BD$, $AD \perp BE$ και $AE \perp AD$

4.05 Από την κορυφή A τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη στην BG που τέμνει τις διχοτόμους των γωνιών B,Γ στα σημεία Δ και E. Ν' αποδειχτεί ότι $\Delta E = AB + AG$.

4.06 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από σημείο E της ευθείας BG, διαφορετικό από το Δ φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΔ η οποία τέμνει την ευθεία AB στο Z και την AG στο H. Ν αποδειχτεί ότι το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

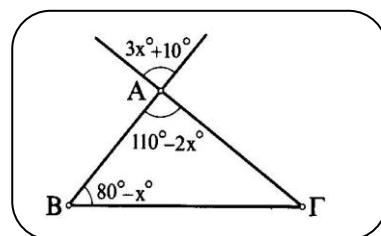
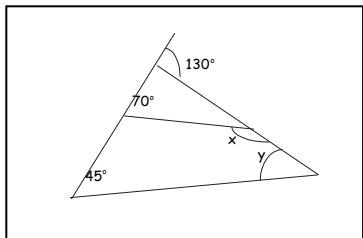
4.07 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διάμεσους BB' και ΓΓ' και μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση BG. Να δειχτεί ότι τα τμήματα της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ των ίσων πλευρών και των αντίστοιχων διαμέσων είναι ίσα.

4.08 Έστω O το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών B και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ . Από το O φέρνουμε παράλληλη προς την πλευρά BG η οποία τέμνει τις AB και AG στα Δ και E αντίστοιχα. να δειχτεί ότι $\Delta E = BD + GE$.



ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- 4.11** Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστούν οι γωνίες A, B και Γ του τριγώνου ABC.



- 4.14** Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου αν οι εξωτερικές του γωνίες είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 3 και 4

- 4.15 Να δείξετε ότι ένα κυρτό v -γωνο δεν μπορεί να έχει περισότερες από 3 εσωτερικές οξείες γωνίες.

- 4.16** A) Πόσες πλευρές έχει ένα κυρτό πολύγωνο του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι 1080° ;
B) Υπάρχει κυρτό πολύγωνο που έχει άθροισμα των γωνιών 13 ορθές;

- 4.17** Η γωνία A ενός ισοσκελούς τριγώνου ABG είναι 78° . Στις προεκτάσεις της βάσης του παίρνουμε τμήματα $BD=AB$ και $GE=GA$ αντίστοιχα. Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ABG και ADE .

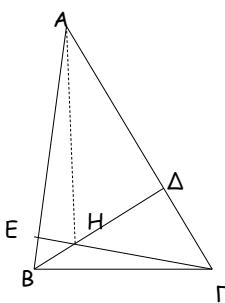
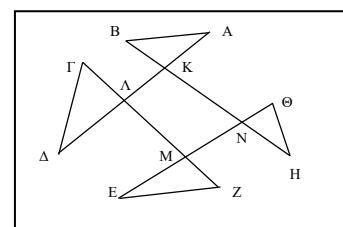
- 4.18 Έστω τρίγωνο ΔABC . Να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται

A) από τις διχοτόμους των γωνιών B και Γ είναι ίση με $90^\circ + \frac{A}{2}$

B) από τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών B και Γ ισούται με $90^\circ - \frac{A}{2}$

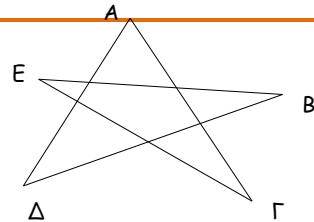
Γ) από τις διχοτόμους της γωνίας Β και της εξωτερικής γωνίας Γ ιστούται με $\frac{A}{2}$

- 4.19** Στο σχήμα να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών
Α+Β+Γ +Δ +Ε+Ζ+Η+Θ



- 4.20** Δίνεται τρίγωνο ABG με $\hat{A} = 45^\circ$. Αν τα ύψη BD και GE τέμνονται στο H να αποδείξετε ότι $\text{AH} = \text{BG}$

4.21 Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών $A+B+\Gamma+\Delta+E$ του διπλανού σχήματος



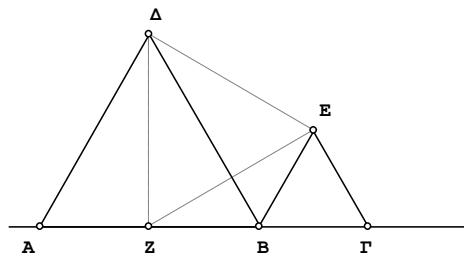
4.22 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διχοτόμο AE της γωνίας A . Να αποδείξετε ότι :

A) $\Delta \overset{\Delta}{E}A = \frac{180 + \overset{\Delta}{\Gamma} - \overset{\Delta}{B}}{2}$

B) $\Delta \overset{\Delta}{A}E = \frac{\overset{\Delta}{B} - \overset{\Delta}{\Gamma}}{2}$

4.23 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και τη διχοτόμο του $A\Delta$. Σ την ημιευθεία AB παίρνουμε τμήμα $A\Gamma' = A\Gamma$ και στην πλευρά $A\Gamma$ τμήμα $AB' = AB$. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία B' , Δ , Γ' είναι συνευθειακά.

4.24 Σε ευθεία θεωρούμε τα σημεία A, B και Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν Z είναι το μέσο του AB , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔZE είναι ισόπλευρο.

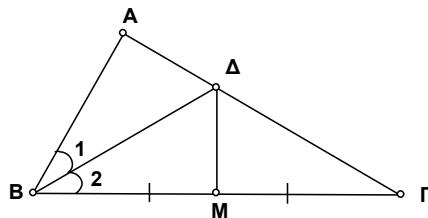


4.25 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο $B\Gamma = 2AB$ και $B = 2\Gamma$.

Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας B που τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ .

Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να δείξετε ότι:

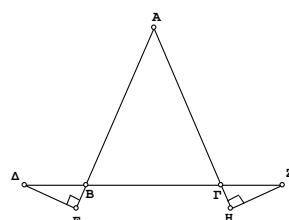
- A) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- B) Η γωνία A είναι ορθή.
- C) $A\Delta < \Delta\Gamma$



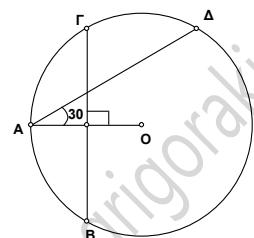
4.26 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

($AB = A\Gamma$) και τα σημεία Δ και B βρίσκονται στην προέκταση της $B\Gamma$ έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma Z$. Αν $\Delta E \perp AB$ και $ZH \perp A\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

- A) $\Delta E = ZH$ και B) $\Gamma H + AB < A\Delta$.



4.27 Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε μια ακτίνα OA , μια χορδή $B\Gamma$ που είναι μεσοκάθετος της ακτίνας OA , και μια ακόμη χορδή $A\Delta$ που σχηματίζει με την OA γωνία 30° . Δείξτε ότι $A\Delta = B\Gamma$.



4.28 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο είναι

$\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας A σχηματίζει με την $B\Gamma$ μια γωνία 45° .

4.29 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικά της AB κατασκευάζουμε $A\Delta B$ ισόπλευρο. Αν η διχοτόμος AN είναι κάθετη και ίση με την $A\Delta$ να βρεθούν οι γωνίες του $AB\Gamma$

4.30 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Από τυχαίο σημείο M του $B\Gamma$ υψώνω κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει την BA στο Δ . Αν η διχοτός της $\hat{\Gamma}$ τέμνει τις $M\Delta$, AB στα K , L αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $K\Lambda\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο

4.31 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και είναι $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$. Στο μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ φέρνουμε μία ευθεία κάθετη στην $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και ΔBK είναι ίσα

4.32 Από το μέσο M της υποτείνουσας $B\Gamma$ ορθογώνιου τρίγωνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $AB > AG$ φέρνουμε κάθετη προς την $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Αν τα τρίγωνα ΔMB και ΔAG είναι ίσα, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

4.33 Να αποδείξετε ότι:

- A) Οι διχοτόμοι δύο γωνιών που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι παράλληλες ή κάθετες.
- B) Οι διχοτόμοι δύο γωνιών που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι παράλληλες ή κάθετες.

4.36 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Στην προέκταση της AG , προς το Γ , παίρνουμε τμήμα $\Gamma E = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta E$

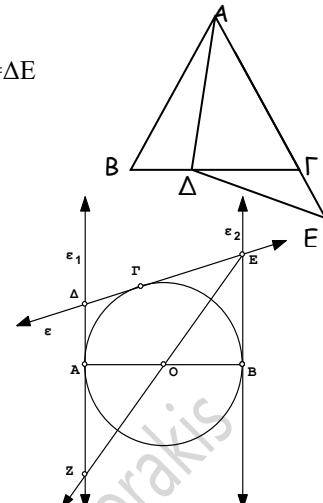
4.37 Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και μια διάμετρος του AB . Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B και η ε είναι εφαπτομένη σε σημείο Γ που τέμνει την ε_1 στο Δ και την ε_2 στο E . Η EO είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου E που τέμνει την ε_1 στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- A) ο τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.
- B) $\Delta O \perp ZE$

4.34 Να αποδείξετε ότι όταν δύο απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ορθές τότε οι διχοτόμοι των δύο άλλων γωνιών του είναι παράλληλες.

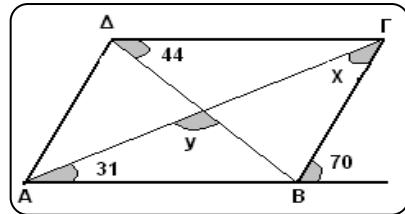
4.35 Σε τετράπλευρο να αποδείξετε ότι

- A) η γωνία που σχηματίζεται από τις διχοτόμους δύο διαδοχικών γωνιών του, είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο άλλων γωνιών του.
- B) οι διχοτόμοι των γωνιών του, σχηματίζουν τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.
- Γ) οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του, σχηματίζουν τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.
- Δ) η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών του είναι ίση με την ημιδιαφορά των δύο άλλων γωνιών του.
- Ε) η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών εξωτερικών γωνιών τετραπλεύρου είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο αυτών (εσωτερικών) γωνιών



5 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

5.01 Στο Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τις γωνίες x και y .



5.02 Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E το μέσο της $\Delta\Gamma$. Στο E φέρουμε μια ευθεία κάθετη στη BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο Z , και την ευθεία BA στο N . Να αποδείξετε ότι :

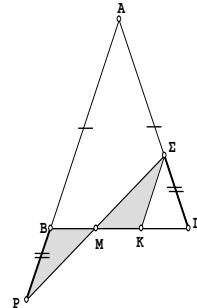
- A) $EN = EZ$
- B) $BZ = \Delta Z + \Delta\Gamma$

5.03 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρνουμε $\Gamma\Delta$ το ύψος. Έστω M μέσο του $\Gamma\Delta$ και η κάθετη Από το Γ στη $\Delta\Gamma$ τέμνει την AM στο E . Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$

5.04 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, ($AB = \Gamma A$) και Σ τυχαίο σημείο της AG .

Προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του B κατά τμήμα $BP = \Sigma G$. Αν $\Sigma K // AB$, να αποδείξετε ότι:

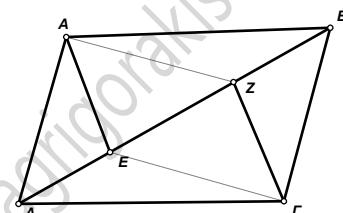
- A) τρίγωνο $\Sigma K\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- B) Τα τρίγωνα BPM και $MK\Gamma$ είναι ίσα
- C) Η $B\Gamma$ διχοτομεί την $P\Sigma$.



5.05 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις προεκτάσεις των διαμέσων του AM , BN τα σημεία Δ , E τέτοια ώστε $M\Delta = MA$ και $N\Gamma = NB$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \Gamma E$ και ότι τα σημεία Γ , Δ και E είναι συνευθειακά.

5.06 Δίνετε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = \Gamma A$) και σημείο M στην προέκταση της βάσης $B\Gamma$ προς το μέρος του B . Από το M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και AG , οι οποίες τέμνουν τις ημιευθείες GA , AB στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $M\Delta - ME = AB$.

5.07 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ από τις κορυφές A και Γ φέρνουμε $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$. Να αποδείξετε ότι το $AZ\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

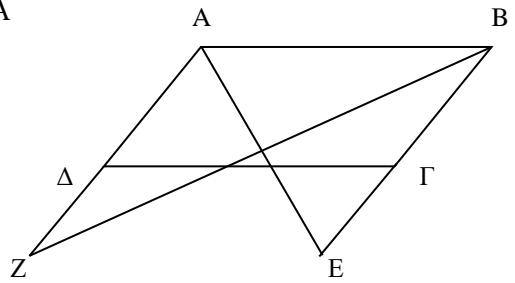


5.08 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A

τέμνει την $B\Gamma$ στο E και η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Delta$ στο Z

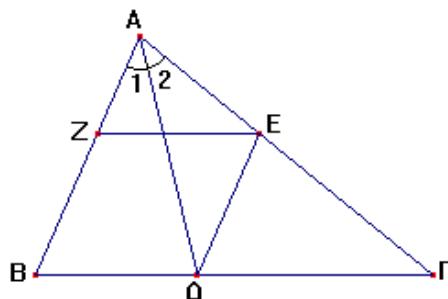
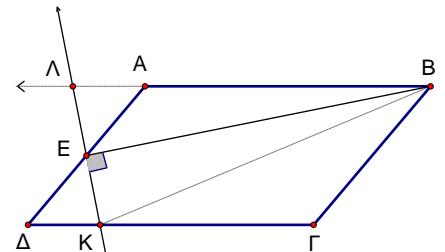
Να αποδείξεται ότι :

- A) Τα τρίγωνα ABE και AZB είναι ισοσκελή
- B) Τα τμήματα AE και BZ τέμνονται κάθετα
- C) Τα τετράπλευρα $ABEZ$ και $\Delta\GammaZE$ είναι παραλληλόγραμμα.



5.09 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E το μέσο της πλευράς $A\Delta$. Φέρνουμε την EB και στη συνέχεια την κάθετη στην EB στο E που τέμνει τις πλευρές $\Gamma\Delta$ και AB του παραλληλόγραμμού (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- A) $\Lambda\Delta = \Delta K$ και $\Lambda E = EK$
- B) Το τρίγωνο $KB\Lambda$ είναι ισοσκελές
- C) Η KL είναι διχοτόμος της γωνίας ΔKB .



5.10 Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$.

Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E και από το E φέρνουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

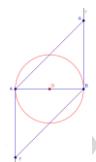
- A) Να δικαιολογήσετε ότι το τετράπλευρο $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- B) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές
- C) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AE και BZ είναι ίσα
- D) Αν επιπλέον η γωνία BAG είναι ίση με 86° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AED .

5.11 Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB . Στα σημεία A και B φέρνουμε τις εφαπτόμενες

Ax και By , όχι προς το ίδιο μέρος της AB και παίρνουμε πάνω σε αυτές τμήματα $A\Gamma=B\Delta=AB$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

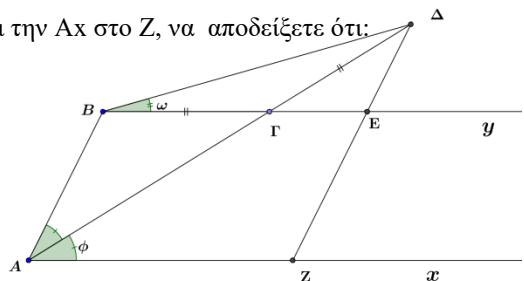
Γ2. Να βρεθούν οι γωνίες του παραλληλογράμμου $A\Gamma B\Delta$.



5.12 Απ' τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος AB φέρνουμε τις ημιευθείες Ax και By έστι ώστε $Ax//By$. Αν η διχοτόμος της $B\hat{A}x$ τέμνει την By στο Γ , στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ πάρουμε σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma B=\Gamma\Delta$ και από το Δ φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την By στο E και την Ax στο Z , να αποδείξετε ότι:

Γ1. $AB=B\Gamma$ **Γ2.** $\phi=2\omega$

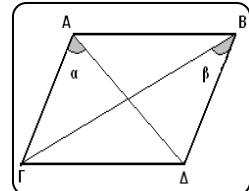
Γ3. $Z\Delta=BE$



ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ – ΡΟΜΒΟΣ - ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

5.13 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και το συμμετρικό E του A ως προς την $B\Delta$. Η ευθεία BE τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο M . Αν N είναι η προβολή του M στην $B\Delta$, να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, N, Γ είναι συνευθεικά

5.14 Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος. Αν $\alpha = 3x - 2$ και $\beta = 2x + 7$, τότε να υπολογίσετε το x



5.15 Σε κύκλο (O, r) φέρνουμε χορδή $AB = r$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο M του κυρτογώνιου τόξου \widehat{AB} . Αν Γ, Δ, E, Z είναι τα μέσα των OA, OB, MB, MA , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

- A. Η γωνία $AOB = 60^\circ$
- B. Το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EZ$ είναι ρόμβος.

5.16 Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$ και $AB\Delta = A\Gamma\Delta$.

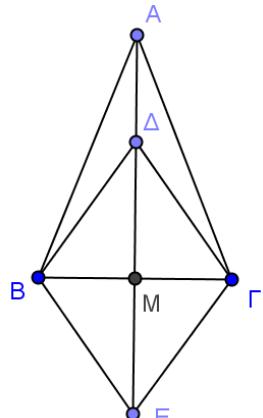
- A) Αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- B) Να δείξετε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
- Γ) Αν προεκτείνουμε την $A\Delta$ να αποδείξετε ότι διέρχεται από το μέσο της $B\Gamma$.
- Δ) Αν $\Delta M = ME$, αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma E$ είναι ρόμβος.

5.17 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z, K, Λ τα μέσα των $B\Gamma, A\Delta, A\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα.

- A. Δείξτε ότι το τετράπλευρο $KE\Lambda Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
- B. Αν επιπλέον $AB = \Gamma\Delta$, να δείξετε ότι το $KE\Lambda Z$ είναι ρόμβος.

5.18 Πάνω στη διαγώνιο $B\Delta$ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τμήμα $BE = B\Gamma$.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{E}$.



5.19 Προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓB τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ κατά AE

και BZ αντίστοιχα ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι : A) $AZ = \Delta E$ B) $AZ \perp \Delta E$

5.20 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στο B και έστω BM η διάμεσος του. Σχηματίζουμε δύο τετράγωνα εξωτερικά του τριγώνου $ABH\Gamma$ και $B\Gamma P\Theta$, να δείξετε ότι $(H\Theta) = 2(BM)$

5.21 Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας EAB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z . Από το σημείο Δ φέρουμε $\Delta H \perp AZ$ (Η σημείο της AZ) που τέμνει την AB στο σημείο Θ και την AE στο σημέιο I . Να αποδείξετε ότι:

- | | | | |
|---|--|---|----------------------|
| A | Το τρίγωνο $AI\Theta$ είναι ισοσκελές | B | $\Delta E = IE$ |
| Γ | Τα τρίγωνα ABZ και $A\Delta\Theta$ είναι ίσα | Δ | $AE = \Delta E + BZ$ |

5.22 Θεωρούμε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το ισόπλευρο τρίγωνο ABE εντός του τετραγώνου και το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma Z$ εκτός του τετραγώνου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ , E και Z είναι συνευθειακά.

5.23 Θεωρούμε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $AB = \Gamma A$.

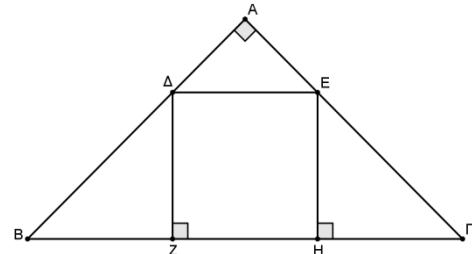
Στις ίσες πλευρές του AB και ΓA παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα,

$$\text{έτσι ώστε } \Delta A = \frac{1}{3} AB \text{ και } AE = \frac{1}{3} \Gamma A$$

Αν τα Z και H είναι τα ίχνη των κάθετων τμημάτων από τα Δ και E

στην $B\Gamma$, τότε:

- A Να αποδείξετε ότι το ΔEHZ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- B Να αποδείξετε ότι το ΔEHZ είναι τετράγωνο.
- C Να αποδείξετε ότι $BZ = ZH = HG$.



5.24 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ προς το μέρος του Δ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$. Έστω Z το μέσο της $A\Delta$ και H το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- A $\Delta H = \frac{1}{2} A\Delta$
- B $\Gamma Z = AH$.
- C ΓZ κάθετη στην AE .

5.25 Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ABE εσωτερικά και $B\Gamma Z$ εξωτερικά.

- A Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$
- B Να δείξετε ότι το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,
- C Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta E Z}$

5.26 Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 60^\circ$.

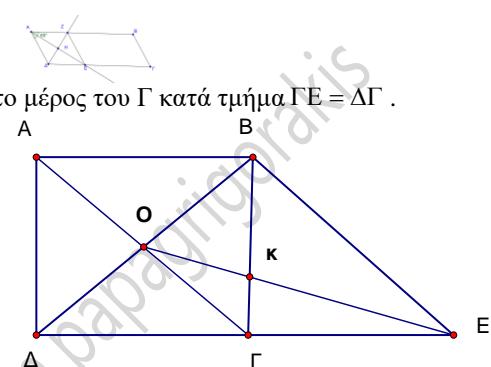
Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ σε σημείο E , ενώ η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AE σε σημείο H και την AB σε σημείο Z .

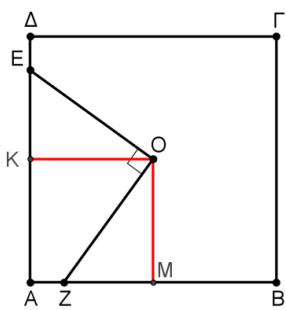
- D₁. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \Delta E$.
- D₂. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2 \cdot \Delta H$
- D₃. Να αποδείξετε ότι το $AZE\Delta$ είναι ρόμβος.

5.27 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- A) Η γωνία $BE\Gamma$ είναι 45°
- B) Το τρίγωνο ΔBE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .
- C) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- D) Αν O το κέντρο του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και η EO τέμνει τη $B\Gamma$ στο K , να δείξετε ότι το K είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta E$.





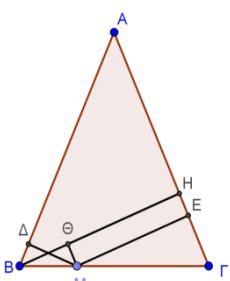
5.28 Δίνεται τετράγωνο $ABGD$ με O το κέντρο του. Έστω τυχαίο σημείο Z πάνω στην AB και σημείο E πάνω στην AD τέτοιο ώστε $\hat{ZOE} = 90^\circ$. Έστω K και M τα μέσα των AD και AB αντίστοιχα

- A) Να αποδειχτεί ότι τρίγωνο OZM = τρίγωνο OEK
- B) Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο EOZ είναι ισοσκελές και να υπολογιστούν οι γωνίες του
- Γ) Να αποδείξεις ότι $AZ = DE$
- Δ) Να προεκτείνεις τις EO και ZO προς το O οι οποίες τέμνουν την BG στο N και την GD στο L αντίστοιχα. Να αποδείξεις ότι το $EZN\Delta$ είναι επίσης τετράγωνο

5.29 Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABGD$ με $AB = 2BG$.

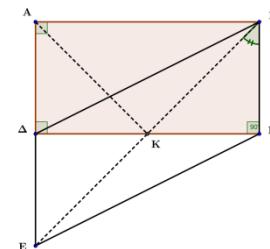
Προεκτείνουμε την AD προς το Δ κατά ίσο τμήμα ΔE .

- A) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο $B\Delta EG$ είναι παραλληλόγραμμο.
- B) Να υπολογιστεί η γωνία \hat{EBG} Γ) Να αποδειχθεί ότι $AK \perp BE$



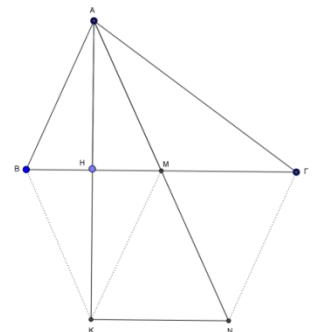
5.30 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB=AG$, τυχαίο σημείο M της βάσης του BG και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , AG , και BH αντίστοιχα. Να αποδείξεις ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.
- β) $B\Theta = M\Delta$ γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$



5.31 Σε τρίγωνο ABG η διάμεσος του AM είναι ίση με την πλευρά AB . Φέρουμε το ύψος AH και στην προέκταση του παίρνουμε τμήμα $HK=AH$. Στη συνέχεια στην προέκταση της διαμέσου AM παίρνουμε τμήμα $MN=AM$. Να αποδείξετε ότι:

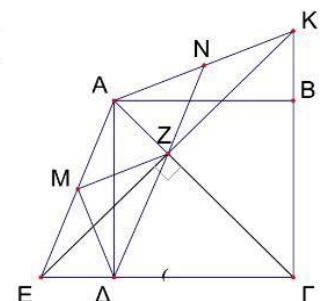
- Δ1. $HM = \frac{KN}{2}$ Δ2. Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.
- Δ3. Το τετράπλευρο $BAGN$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ABKM$ είναι ρόμβος.



5.32 Δίνεται τετράγωνο $ABGD$ και σημείο E στην προέκταση της πλευράς GD . Από το E φέρουμε ευθεία κάθετη στην AG , που τέμνει την AG στο Z και την προέκταση της GB στο K . Αν M, N είναι τα μέσα των AE, AK αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Δ1. Το τρίγωνο $M\Delta Z$ είναι ισοσκελές
- Δ2. $H\Gamma$ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $E\Gamma K$.
- Δ3. Το τετράπλευρο $MNZE$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Δ4. Το τετράπλευρο $ANZM$ είναι ρόμβος.

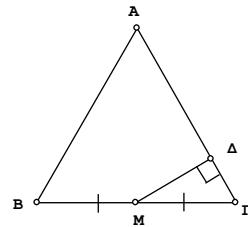
m.papag



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛ/ΜΩΝ –ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

5.33 Σε ισόπλευρο τρίγωνο ABG από το μέσον M της BG

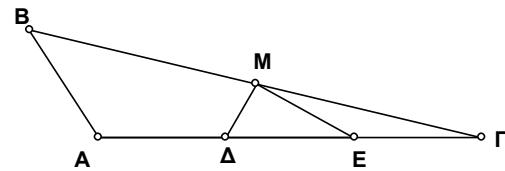
φέρνουμε $\Delta D \perp AG$. Να αποδείξετε ότι $AD = 3 \cdot \Delta D$.



5.34 Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ABG με $AG = 3AB$. Τα

σημεία Δ και E βρίσκονται στην πλευρά AG έτσι, ώστε

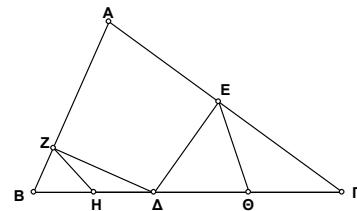
$AD = DE = EG$. Αν M είναι το μέσο του BG , να αποδείξετε ότι γωνία ΔME είναι ορθή.



5.35 Δίνεται τρίγωνο ABG και Δ τυχαίο σημείο της BG .

Φέρουμε $\Delta Z \perp AB$ και $\Delta E \perp AG$. Αν H και Θ τα μέσα των $B\Delta$ και

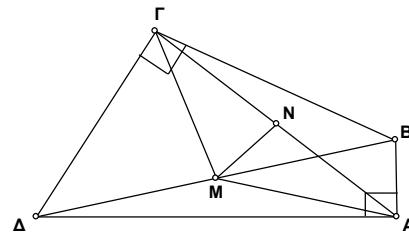
$\Gamma\Delta$ αντίστοιχα δείξτε ότι: $2(ZH + E\Theta) = BG$



5.36 Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A = \Gamma = 90^\circ$. Αν M είναι το

μέσο της $B\Delta$ και N το μέσο της $\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι:

- A) Το τρίγωνο MAN είναι ισοσκελές.
- B) $AG \leq BD$
- C) $MN \perp AG$

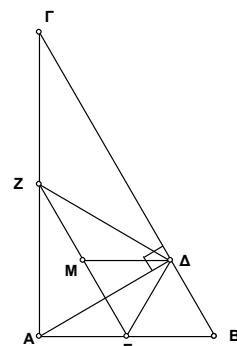


5.37 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABG με υποτείνουσα BG

θεωρούμε το ύψος AD και τα μέσα E και Z των AB και AG

αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το $Z\Delta E$:

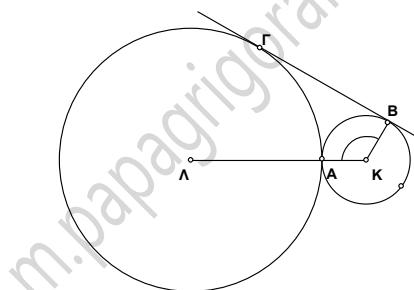
- A) Είναι ορθογώνιο.
- B) Έχει περίμετρο την ημιπερίμετρο του ABG .
- C) Έχει διάμεσο ΔM ίση με $\frac{1}{4}BG$
- D) Αν επι πλέον $\Gamma = 30^\circ$ να αποδείξετε ότι $\Delta E = \frac{1}{4}BG$



5.38 Δύο κύκλοι (K,R) και $(\Lambda,3R)$ εφάπτονται εξωτερικά στο

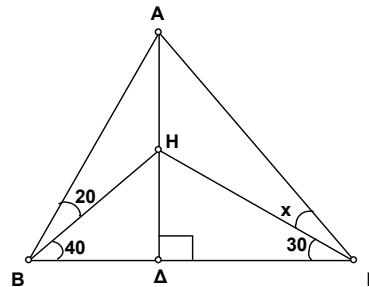
σημείο A . Αν BG είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους να

αποδείξτε ότι η γωνία BKL είναι 120° .



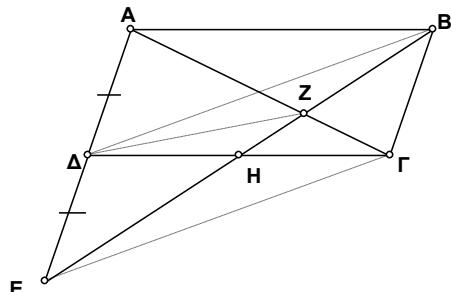
- 5.39** Σε τρίγωνο ABC φέρνουμε $AD \perp BG$ και σημείο H στην AD ώστε η γωνία $ABH = 20^\circ$, γωνία $HBG = 40^\circ$ και γωνία $HGB = 30^\circ$

- A) Να αποδείξετε ότι $GH \perp AB$.
 B) Να υπολογίσετε τη γωνία AGH .

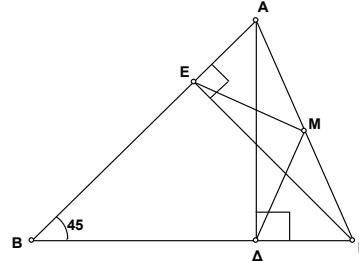


- 5.40** Σε παραλληλόγραμμο $ABGD$ προεκτείνουμε την πλευρά AD κατά τμήμα $\Delta E = AD$. Αν η BE τέμνει την AG στο σημείο Z και τη DG στο σημείο H , να αποδείξετε ότι:

- A) Το $\tau B\Delta EG$ είναι παραλληλόγραμμο.
 B) $\Delta H = HG$
 γ) $H \Delta Z$ Περνάει από το μέσο της BG .

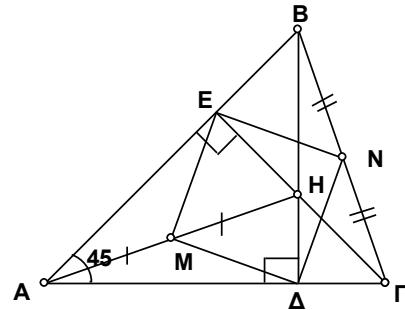


- 5.41** Σε τρίγωνο ABC η γωνία B είναι 45° . Αν $A\Delta$ και GE τα δύο ύψη του τριγώνου και M το μέσο της AG να αποδείξετε ότι $ME \perp MA$

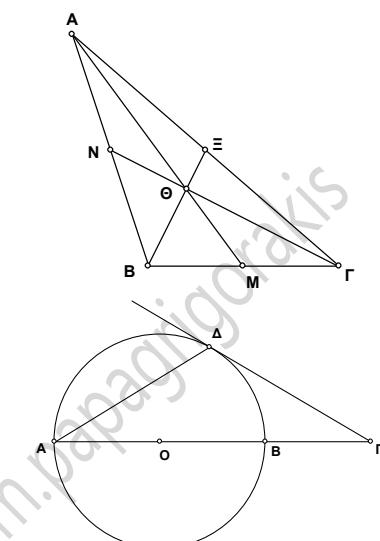


- 5.42** Δίνεται τρίγωνο ABC με γωνία $A=45^\circ$, τα ύψη $B\Delta$ και GE που τέμνονται στο H , το μέσο M του AH και το μέσο N του BG .

- Να αποδείξετε ότι:
 A) $EN = \Delta N$
 B) $EM = M\Delta$
 Γ) Τα τρίγωνα $AH\Delta$ και $B\Delta G$ είναι ίσα.
 Δ) Το τετράπλευρο ΔMEN είναι τετράγωνο



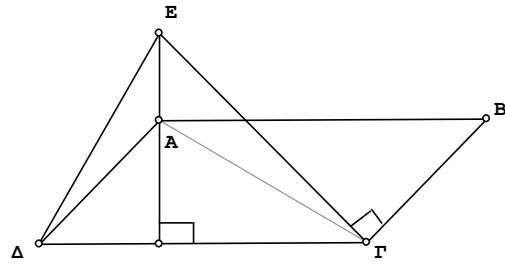
- 5.43** Έστω Θ το βαρύκεντρο τριγώνου ABC . Αν $A\Theta=B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $B\Theta \perp \Gamma\Theta$.



- 5.44** Σε κύκλο (O,R) προεκτείνουμε τη διάμετρο AB κατά τμήμα $B\Gamma=R$ και φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές

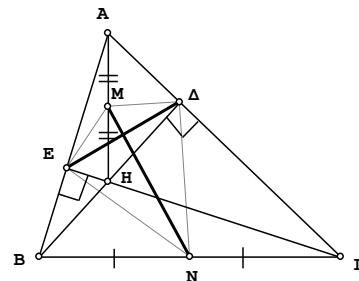
5.45 Δίνεται παραλληλόγραμμο $\Delta\Gamma\Delta$. Η κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο Γ και η κάθετη από το Δ προς την AB τέμνονται στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- A) $\Delta A \perp EG$.
- B) $\Gamma A \perp DE$.



5.46 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη $B\Delta$ και GE που τέμνονται στο H , το μέσο M του HA και το μέσο N της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

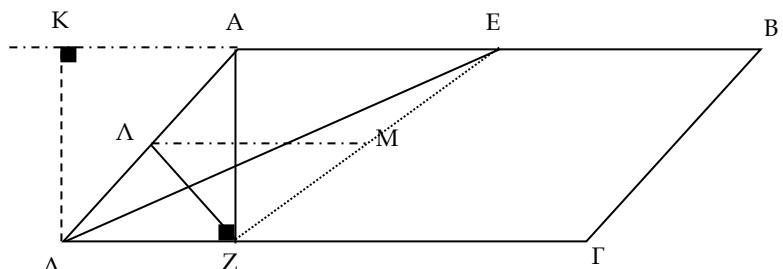
- a) $EN = \Delta N$
- β) $EM = \Delta M$
- γ) $MN \perp \Delta E$



5.47 Έστω παρ/μο $\Delta B\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$.

Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει την AB στο μέσο E .

- A) Δείξτε ότι: $AD = \frac{AB}{2}$
- B) Δείξτε ότι: $KD = \frac{\Delta E}{2}$

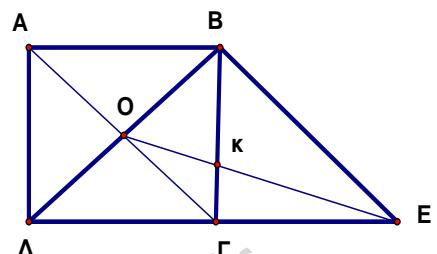


- Γ) Αν Λ , M είναι τα μέσα των τμημάτων AD και ZE αντίστοιχα δείξτε ότι: $\Lambda M = \frac{AD + ZE}{2}$

5.48 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- A) Η γωνία $BE\Gamma$ είναι 45° .
- B) Το τρίγωνο ΔBE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- Γ) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Δ) Αν O το κέντρο του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και EO τέμνει την $B\Gamma$ στο K , να δείξετε ότι το K είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta E$.



5.49 Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\Gamma=45^\circ$ και $B=15^\circ$. Στην προέκταση της πλευράς ΓA προς το A παίρνουμε τμήμα $A\Delta=2\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $A\Delta B=75^\circ$.

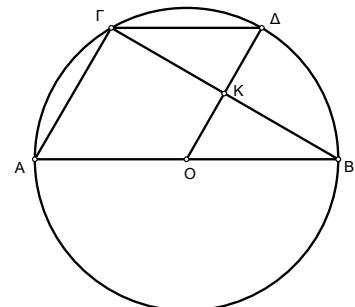
5.50 Από ένα εξωτερικό σημείο P , κύκλου (O, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA , PB , ‘οπου $\angle APB=60^\circ$. Προεκτείνουμε το OB (προς το μέρος του B) κατά τμήμα $BM=OB$.

Αν η ευθεία OP τέμνει τον κύκλο στο K , να αποδείξετε ότι:

- A) γωνία $BPM=30^\circ$
- B) $PM=2R$
- C) Το τετράπλευρο $OAKB$ είναι ρόμβος

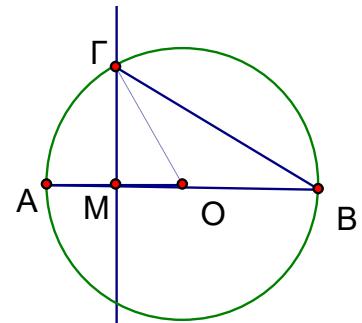
5.51 Δίνεται κύκλος (O, R) , μια διάμετρος AB και χορδή $AG=R$. Φέρνουμε OK κάθετη στη BG που η προέκταση της τέμνει τον κύκλο στο Δ .

- A. Να δείξετε ότι $AG = 2 \cdot OK$
- B. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AOD\Gamma$ είναι ρόμβος.



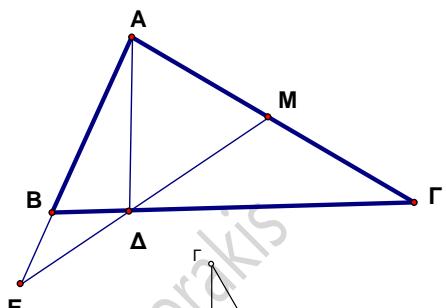
5.52 Δίνεται κύκλος με κέντρο O και μία διάμετρος του AB . Φέρνουμε τη μεσοκάθετο του OA που τέμνει την OA στο M και τον κύκλο στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- A) Το τρίγωνο AOG είναι ισόπλευρο
- B) Η OG είναι διχοτόμος της γωνίας MGB
- C) $GB = 2GM$.



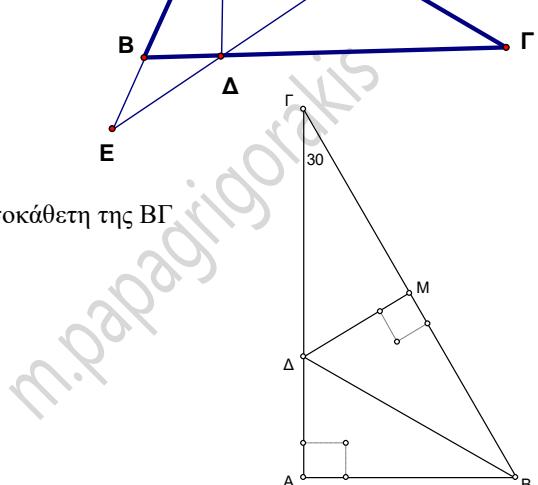
5.53 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου $B = 2\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$. Προεκτείνουμε την AB προς το B και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $BE = BD$. Προεκτείνουμε το τμήμα $E\Delta$ που τέμνει την πλευρά AG στο M . Να αποδείξετε ότι :

- A) $AB\Delta = 2 \cdot BD\Delta$
- B) Το M είναι μέσο της AG .



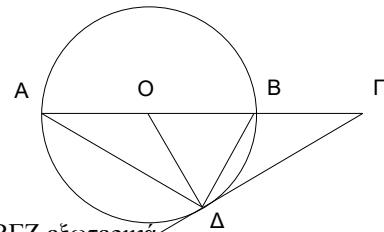
5.54 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ($A=90^\circ$) με $\Gamma=30^\circ$. Αν η μεσοκάθετη της $B\Gamma$ στο μέσο της M , τέμνει την AG στο Δ , να αποδείξετε ότι

- A) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\Gamma$
- B) $AD = \frac{AG}{3}$



5.55 Δίνεται κύκλος (O, R) και η διάμετρός του AB . Προεκτείνουμε την διάμετρο AB προς το μέρος του B κατά τμήμα $BG = R$. Από το G φέρνουμε την εφαπτομένη $\Gamma\Delta$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

- A. Τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma B$ είναι ορθογώνια.
- B. Το τρίγωνο $\Delta \Gamma B$ είναι ισόπλευρο.
- C. Τα τρίγωνα $\Delta A \Gamma$ και $\Delta B \Gamma$ είναι ίσα.



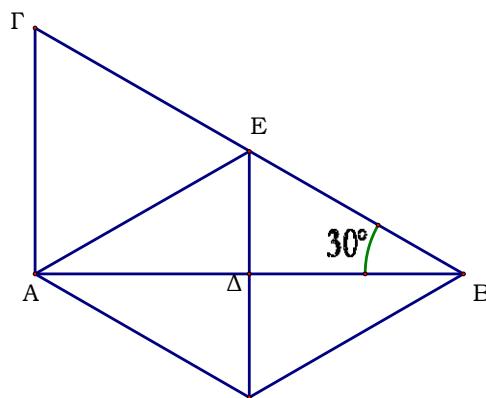
5.56 Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ABE εσωτερικά και $B\Gamma Z$ εξωτερικά.

- A. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE
- B. Να δείξετε ότι το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,
- C. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta EZ}$

5.57 Στο παρακάτω σχήμα είναι: $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο

με $\hat{A} = 1\angle$ και $\hat{B} = 30^\circ$, τα Δ και E είναι τα μέσα των $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα, $\Delta Z = E\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

- A. $AE = EZ = \frac{BG}{2}$
- B. $EZ // AG$
- C. $AEBZ$ είναι ρόμβος



5.58 Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε E, Z, H, Θ τα μέσα των πλευρών $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta A$ και K, Λ τα μέσα των διαγωνίων AG και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- A) Τα τετράπλευρα $EKHN$ και $ZK\Theta L$ είναι παραλληλόγραμμα.
- B) Οι ευθείες $EH, Z\Theta$ και $K\Lambda$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

5.59 Δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου σχηματίζουν ρόμβο, ενώ τα μέσα πλευρών τετραγώνου σχηματίζουν τετράγωνο.

- 5.60 A) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AM και το ενθύγραμμο τμήμα ΔE που ενώνει τα μέσα των πλευρών AB , AG τριγώνου ABG διχοτομούνται.
- B) Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν E, Z τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα και K, Λ, M, N τα μέσα των AZ, GE, BZ και ΔE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KLMN$ είναι παραλληλόγραμμο.

- 5.61 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στις πλευρές του $AB, \Gamma\Delta$ τα σημεία E, Z ετσι ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta Z = \frac{1}{3}\Gamma\Delta$, αντίστοιχα. Αν H το σημείο τομής των ευθειών ΔA και EZ να αποδειχθεί ότι $\Delta A = \Delta H$ και $ZH = ZE$.

5.62 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις ημιευθείες $B\Gamma$, ΓA τα σημεία Δ, E αντίστοιχα ετσι ώστε

$\Gamma\Delta = AE = AB$. Αν Z το σημείο τομής των ευθειών AB και ΔE να αποδειχθεί ότι $AB = 3AZ$.

5.63 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B = 2\Gamma < 90^\circ$. Αν $A\Delta$ το ύψος του $AB\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$, δείξτε ότι $AB = 2M\Delta$

5.64 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = \Gamma A$) και η μεσοκάθετη της ΓA τέμνει το ύψος $A\Delta$ στο E . Αν Z το συμμετρικό του E ως προς το μέσο M της ΓA και η παρράλληλη από το Z προς την AB τέμνει την $B\Gamma$ στο Λ , να αποδειχθεί ότι $\angle Z\Lambda E = 90^\circ$

5.65 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$, τις διαμέσους AM, BN και τα συμμετρικά Δ, E των A, B ως προς τα M, N αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι α) τα Δ, Γ, E είναι συνευθειακά β) $\Gamma\Delta = \Gamma E$

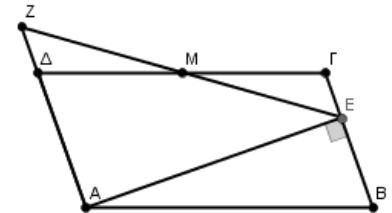
5.66 Δίνετε παρ/μο $AB\Gamma\Delta$ με $A=120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο μέσο E . Να αποδείξετε ότι α) $AB = 2AE$ β) $\Delta E = 2AZ$ οπου AZ είναι η απόσταση του A από τη $\Gamma\Delta$ γ) H γωνία $\Delta\Gamma\Delta = 90^\circ$

5.67 Δίνεται τριγωνο $AB\Gamma$ με $B = 45^\circ$ και $\angle\Gamma = 30^\circ$. Αν Δ είναι το μέσο της ΓA να δειχθεί ότι $\angle\Delta B\Gamma = 15^\circ$.

5.68 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 2AB$. Έστω M το μέσο της $B\Gamma$ και σημεία N, P στην πλευρά AG ώστε $AN = NP = PG$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο AMP είναι ορθογώνιο.

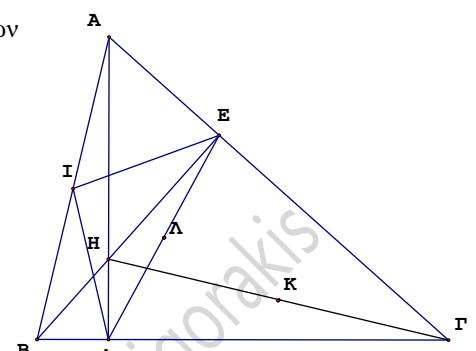
5.69 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Έστω E η προβολή του A πάνω στην ευθεία $B\Gamma$, M το μέσο της $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο στο οποίο η ευθεία EM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- A) τα τρίγωνα ΔMZ και ΓME είναι ίσα
- B) το τρίγωνο AEZ είναι ορθογώνιο
- Γ) το τρίγωνο AMZ είναι ισοσκελές
- Δ) $AZM = AM\Delta$



5.70 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Έστω H το ορθόκεντρό του, I, K, Λ τα μέσα των τμημάτων AB, GH και ΔE αντίστοιχα. Να δείξτε ότι:

- A) Τα τρίγωνα $K\Delta E$ και $I\Delta E$ είναι ισοσκελή.
- B) Τα σημεία I, K, Λ είναι συνευθειακά (βρίσκονται στην ίδια ευθεία).

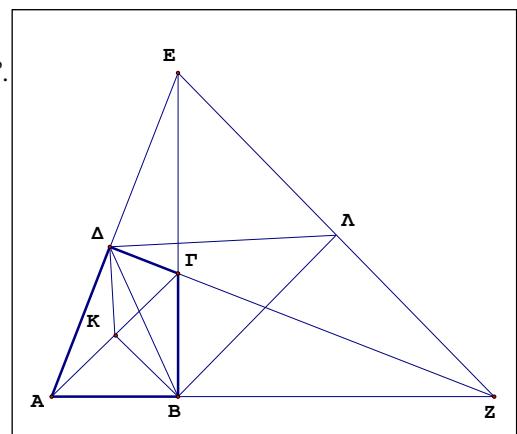


5.71 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ παραπληρωματικές και $\hat{\Delta}=90^\circ$.

Οι ευθείες AD και BG τέμνονται στο E και οι AB και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο Z .

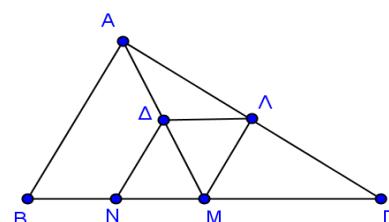
Έστω K , και Λ τα μέσα των AG και EZ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- A. $\hat{B}=90$
- B. Τα τρίγωνα $K\Delta B$ και $\Lambda B\Delta$ είναι ισοσκελή.
- Γ. $AG \perp EZ$.
- Δ. Η $K\Lambda$ μεσοκάθετος του $B\Delta$



5.72 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 2AB$. Αν M, Λ, N, Δ είναι τα μέσα των $B\Gamma, AG, BM, AM$ αντίστοιχα, τότε

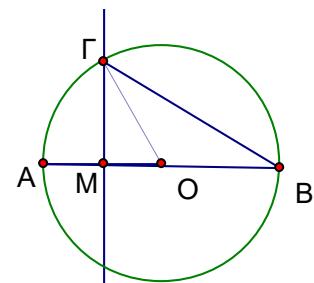
- A. Να δείξετε ότι $\Delta N = // \Lambda M$
- B. Να δείξετε ότι το $\Delta \Delta MN$ είναι ρόμβος.
- Γ. Αν K το σημείο τομής των AN και $B\Delta$, να δικαιολογήσετε ότι $BK =$



5.73 Δίνεται κύκλος με κέντρο O και μία διάμετρος του AB . Φέρουμε τη μεσοκάθετο του OA που τέμνει την OA στο M και τον κύκλο στο Γ .

Να αποδείξετε ότι:

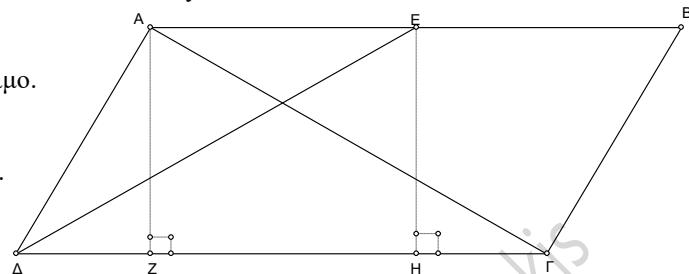
- A) Το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- B) Η $O\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MB\Gamma$.
- Γ) $GB = 2GM$.



5.74 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E, M τα μέσα των πλευρών AB, BG αντίστοιχα.

Οι προεκτάσεις των τμημάτων EM και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- A) Τα τρίγωνα EBM και ΓMZ είναι ίσα
- B) Το τετράπλευρο $AEZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Γ) Αν η AZ τέμνει τη $B\Gamma$ στο Θ τότε:
 - α) Το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $E\Gamma Z$.
 - β) $\Gamma\Theta = \frac{BG}{3}$

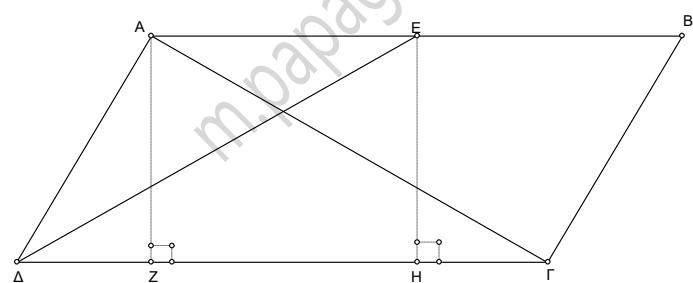


5.75 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $A = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο μέσο της

E και AZ , EH τα κάθετα τμήματα από τα σημεία A, E προς την πλευρά $\Delta\Gamma$.

Δείξτε ότι :

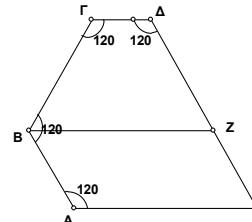
- A) $AB=2\Delta\Lambda$
- B) $AZ=EH$
- Γ) $\Delta E=2AZ$
- Δ) το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο



ΤΡΑΠΕΖΙΑ – ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

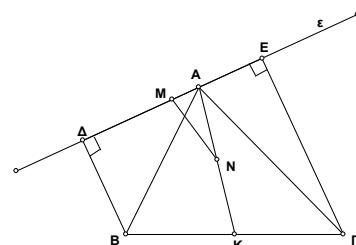
5.76 Σε πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ είναι $A=B=\Gamma=\Delta=120^\circ$. Αν $BZ \parallel \Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι:

- A) το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- B) $AB+BG=ED$



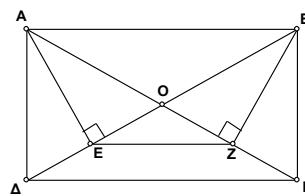
5.77 Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ϵ) είναι τυχαία ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$. Οι $B\Delta$ και ΓE είναι κάθετες στην (ϵ), το M είναι μέσο του ΔE και το N μέσο της διαμέσου AK . Να δείξετε ότι:

- A) $MN = \frac{AK}{2}$
- B) $K\Delta = KE$



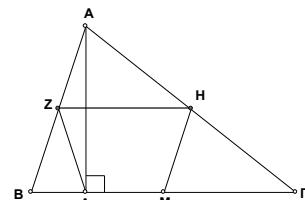
Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ κέντρου Ο φέρνουμε $AE \perp BD$ και $BZ \perp AG$. Να αποδείξετε ότι:

- A) Το τρίγωνο OEZ είναι ισοσκελές.
- B) Το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

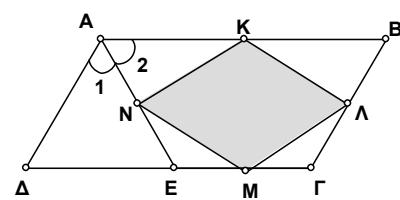


5.78 Στο διπλανό σχήμα το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και Z, M, H είναι τα μέσα των AB , $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- A) $\Delta Z=MH$
- B) Οι γωνίες ΔZH και MHZ είναι ίσες.



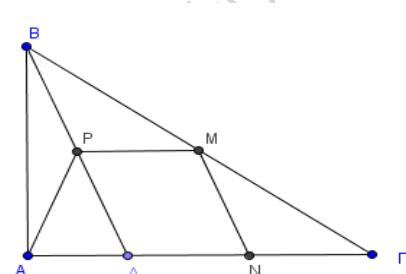
5.79 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A διπλάσια της γωνίας B . Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο E . Να αποδείξετε ότι τα μέσα K, L, M και N των τμημάτων AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και $A\Delta$ είναι κορυφές ρόμβου.



5.80 Δίνεται τραπέζιο ισοσκελές με τη βάση AB τριπλάσια από τη βάση $\Gamma\Delta$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AG , $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο

5.81 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM . Στις ημιευθείες AH και AM παίρνουμε τα σημεία Δ , E , αντίστοιχα, έτσι ώστε $H\Delta=HA$ και $ME=MA$. Να δείξετε ότι

- A) το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές
- B) $H B\Gamma // \Delta E$
- C) Το τετράπλευρο με κορυφές B, Δ, E, Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



5.82 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$. Αν M, P, N είναι τα μέσα των $B\Gamma, B\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι:

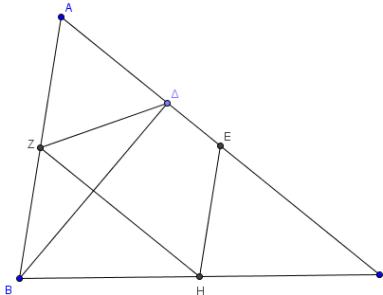
- A. Το $MN\Delta P$ είναι παραλληλόγραμμο.
- B. $AP = P\Delta$
- Γ. Το $MNAP$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5.83 Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρνουμε το ύψος $B\Delta$. Αν Z, H, E , είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$, και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε

- A. Να αποδειχθεί ότι
- α) Το $AZ\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.
- β) Το $\Delta EH\Gamma$ ισοσκελές τραπέζιο.

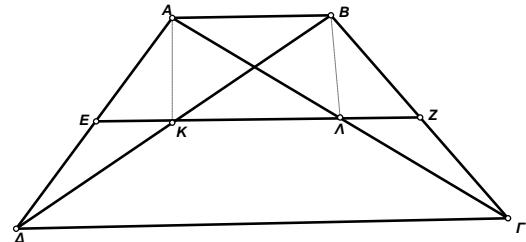
Β. Αν επιπλέον η γωνία $A = 60^\circ$ να αποδείξετε ότι

$$\Delta E = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$



5.84 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB/\Gamma\Delta$ και $A\Delta=B\Gamma$), με $\Gamma\Delta=3AB$. Αν η EZ είναι η διάμεσος του τραπέζιου που τέμνει τις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

- Γ1. $EK = \Lambda Z = \frac{\Gamma\Delta}{6}$
- Γ2. $K\Lambda = AB$.
- Γ3. Το $AB\Lambda K$ είναι ορθογώνιο



5.85 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Delta\Gamma$, $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = A\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.Αν K και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι

- A) $K\Lambda = \frac{AB}{2}$
- Β) $B\Lambda \perp \Delta\Gamma$
- Γ) $B = 3\Gamma$

5.86 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο σημείο Λ . Αν K το σημείο τομής της διχοτόμου $B\Lambda$ με τη διάμεσο EZ του τραπέζιου, να αποδείξετε ότι:

- A) τρίγωνο BKZ ισοσκελές και $\Lambda\Gamma=2BZ$
- Β) γωνία $\Lambda\Gamma\Gamma=90^\circ$
- Γ) ΓK διχοτόμος της γωνίας Γ

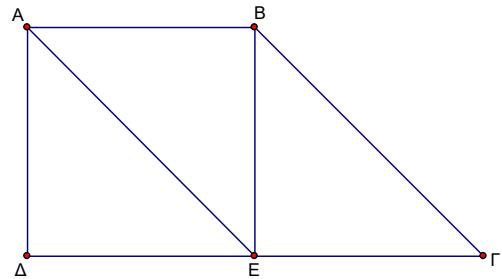
5.87 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Έστω M μέσον του $B\Gamma$, E μέσον του BM , Z μέσον του AB και H μέσον του AM . Προεκτείνουμε το ZE κατά ίσο τμήμα EK . Να αποδείξετε ότι:

- a) Το τετράπλευρο $ZBKM$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- b) Το τετράπλευρο $ZBMH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5.88 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = 2AB$ και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. Από την κορυφή B φέρουμε τη BE κάθετη στη $\Delta\Gamma$.

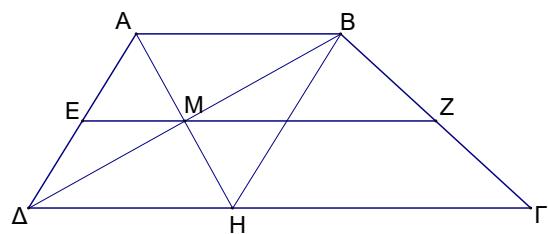
- A) Να αποδειχθεί ότι το $ABGE$ είναι παραλληλόγραμμο.
- B) Το $ABED$ είναι τετράγωνο
- C) Αν N το μέσο του AE και M το μέσο του BE να δειχθεί ότι

$$NM = \frac{\Delta\Gamma}{4}$$



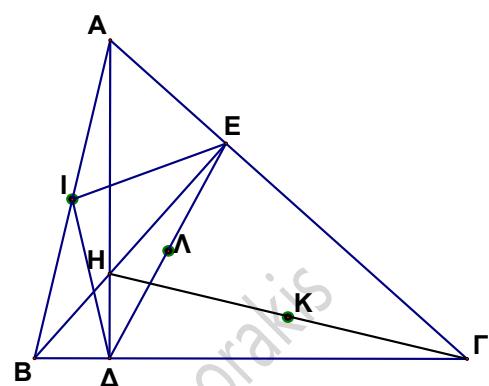
5.89 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε την διάμεσο EZ . Η διχοτόμος της Δ τέμνει την διάμεσο στο M και διέρχεται από την κορυφή B και η AM τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο H .

- Να αποδείξετε ότι
- A. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές
 - B. το σημείο M είναι μέσο του $B\Delta$ και το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ορθογώνιο
 - C. το τετράπλευρο $ABHD$ είναι ρόμβος



5.90 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Έστω H το ορθόκεντρό του, I , K , Λ τα μέσα των τμημάτων AB , ΓH και ΔE αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- A. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ορθογώνια
- B. Τα τρίγωνα $K\Delta E$ και $I\Delta E$ είναι ισοσκελή.
- C. Τα σημεία I , K , Λ είναι συνευθειακά



5.91 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη πλευρά $\Delta\Gamma$ και προς τα δύο μέρη και παίρνουμε τα σημεία E και Z έτσι ώστε

- $AE = \Delta Z = \Delta\Gamma$.
- A. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $AGBE$ και $B\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα
 - B. Αν τα K και Λ είναι τα κέντρα των $AGBE$ και $B\Gamma Z\Delta$ αντίστοιχα να δείξετε ότι το $B\Gamma\Lambda K$ είναι ρόμβος
 - C. Να δείξετε ότι $BZ \perp GE$

5.92 Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα AB εσωτερικά και $B\Gamma$ εξωτερικά.

- A) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta\Gamma E$
- B) Να δείξετε ότι το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

- C) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta}EZ$

5.93 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο σημείο

Λ. Αν K το σημείο τομής της διχοτόμου $B\Lambda$ με τη διάμεσο EZ του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

- A) τρίγωνο BKZ ισοσκελές και $\angle\Gamma = 2\angle BZ$

- B) γωνία $\angle K\Gamma = 90^\circ$

- C) ΓK διχοτόμος της γωνίας Γ

5.94 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$). Αν K, L, M, N μέσα των $AB, \Gamma\Delta, B\Delta, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- A) $KN = KL$

- B) το τετράπλευρο $KLMN$ είναι ρόμβος

- C) αν επιπλέον $\Gamma\Delta = 3AB$ τότε το τετράπλευρο $ABLN$ είναι ορθογώνιο.

5.95 Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $A\Delta$ αντίστοιχα. Φέρνουμε BK κάθετη στην AE η οποία τέμνει την ΓZ στο L . Να δείξετε ότι

- A) Το $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο

- B) Το τρίγωνο $B\Lambda G$ είναι ορθογώνιο

- C) Το τετράπλετρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5.96 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$ και $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$.

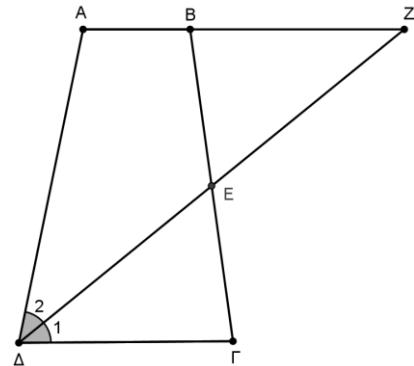
Η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της AB στο Z .

Να αποδείξετε τα επόμενα.

- A) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

- B) $\angle\Gamma = BZ$

- C) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.



5.97 Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $A\Delta$ το ύψος του και K, L, M τα μέσα των $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα, να δείξετε ότι

- A) Το ευθύγραμμο τμήμα LM είναι ίσο με το μισό της πλευράς AB

- B) Το $K\Delta L\Gamma M$ είναι τραπέζιο.

- C) Το $K\Delta L\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5.98 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Έστω M μέσον του $B\Gamma$, E μέσον του BM , Z μέσον του AB και H μέσον του AM . Προεκτείνουμε το ZE κατά ίσο τμήμα EK . Να αποδείξετε ότι:

- A) Το τετράπλευρο $ZBKM$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

- B) Το τετράπλευρο $ZBMH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5.99 Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB/\!/ \Gamma\Delta$) ,έχουμε $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$.

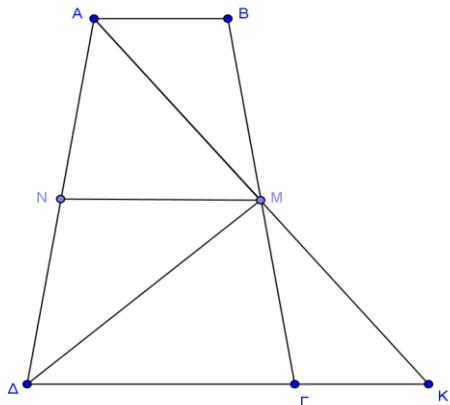
Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και N το μέσο του $A\Delta$, να αποδείξετε ότι:

Δ_1 $MN = AN$.

Δ_2 Η γωνία $AM\Delta$ είναι ορθή.

Δ_3 Αν η AM τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο K , να δείξετε ότι $A\Delta K$ ισοσκελές τρίγωνο.

Δ_4 . Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας A .

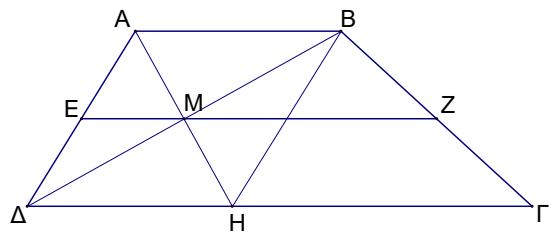


5.100 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB/\!/ \Delta\Gamma$, $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = A\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.Αν K και L είναι τα μέσα των διαγωνίων $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι

A) $KL = \frac{AB}{2}$

B) $BK \perp AL$

C) $B = 3\Gamma$



5.101 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε την διάμεσο EZ . Η διχοτόμος της \hat{A} τέμνει την διάμεσο στο M και διέρχεται από την κορυφή B και η AM τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο H .

Να αποδείξετε ότι

A) το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές

B) το σημείο M είναι μέσο του $B\Delta$ και το τρίγωνο

$AM\Delta$ είναι ορθογώνιο

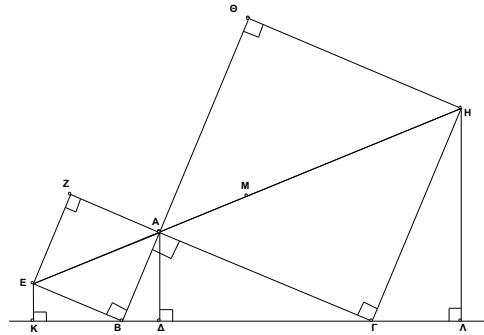
C) το τετράπλευρο $AB\Delta H$ είναι ρόμβος

ΓΕΝΙΚΕΣ 5^{οΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

5.102 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \text{ΒΓ}$, ($\hat{\Delta} = 90^\circ$).

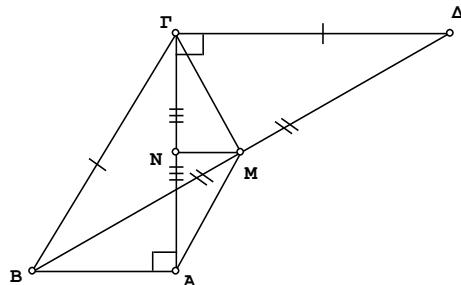
Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα $\Delta \text{ΒΕΖ}$ και $\Delta \text{ΗΓΘ}$. Φέρονται την ΕΚ κάθετη στη ΒΓ , την ΗΛ κάθετη στη ΒΓ και την ΑΔ κάθετη στη ΒΓ . Αν Μ είναι το μέσο της ΕΗ , να αποδείξετε ότι:

- A) Τα σημεία Ε , Α και Η είναι συνευθειακά.
- B) Τα τρίγωνα $\Delta \text{Β}$ και ΕΚΒ είναι ίσα.
- Γ) Τα τρίγωνα $\Delta \text{Γ}$ και ΗΛΓ είναι ίσα.
- Δ) $\text{ΚΒ} = \text{ΛΓ}$
- Ε) $\text{ΕΚ} + \text{ΗΛ} = \text{ΒΓ}$
- Στ) Η γωνία ΒΜΓ είναι ορθή.
- Ζ) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές

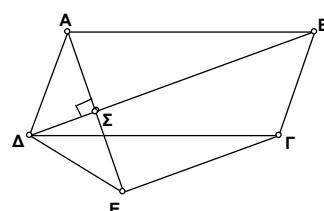


5.103 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \text{ΒΓ}$ με ($\hat{\Delta} = 90^\circ$). Φέρονται με την $\text{ΒΔ} \perp \text{ΑΓ}$ και ίσο με ΒΓ έτσι ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδο σε σχέση με την ΑΓ .

- A) Αποδείξτε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \text{ΒΓ}$.
- B) Αν Ν είναι το μέσον του ΑΓ και Μ το μέσον του ΒΔ να αποδείξετε ότι $\text{ΜΝ} \perp \text{ΑΓ}$.
- Γ) Το τρίγωνο ΜΓΑ είναι ισοσκελές.
- Δ) $\text{ΜΓΔ} + \text{ΒΑΜ} = 180^\circ$.

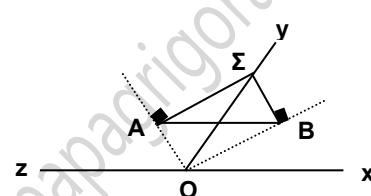


5.104 Δίνεται παραλληλόγραμμο $\Delta \text{ΒΓΔ}$ και το συμμετρικό Ε του Δ προς τη διαγώνιο ΒΔ . Να δειχθεί ότι το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



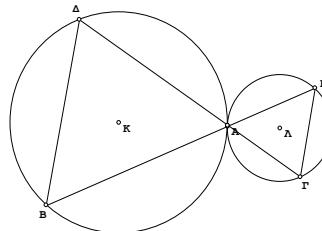
5.105 Έστω οι εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ της Oy και τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ κάθετα προς τις διχοτόμους των παραπάνω γωνιών. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\text{A}\hat{\Sigma}\text{B} = 90^\circ$
- β) $\text{AB} // \text{xz}$

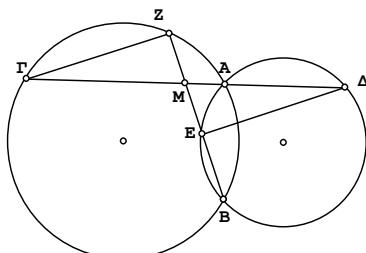


6**ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ - ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ**

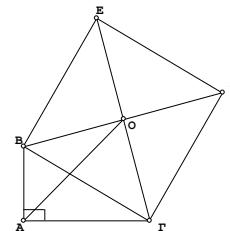
- 6.01 Δύο κύκλοι K και Λ εφάπτονται στο A . Δύο ευθείες που περνούν από το A τέμνουν τον κύκλο K στα B και Δ και τον κύκλο Λ στα E και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $B\Delta \parallel GE$.



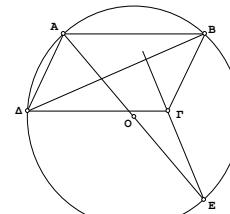
- 6.02 Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Μια ευθεία διέρχεται από το A και τέμνει τους κύκλους στα σημεία Γ και Δ . Έστω M το μέσο του $\Gamma\Delta$. Η ευθεία BM τέμνει τους κύκλους στα σημεία E και Z . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma M Z$ και $E M \Delta$ είναι ίσα και ότι $ME = MZ$.



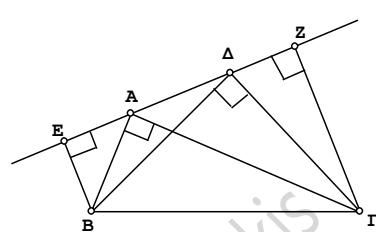
- 6.03 Εξωτερικά ενός ορθογωνίου τριγώνου ABG , ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε Τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Αν O είναι το κέντρο του τετραγώνου αυτού, να αποδειχθεί ότι η AO διχοτομεί τη γωνία A .



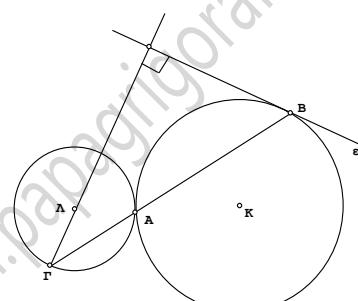
- 6.04 Οι κορυφές A , B και Δ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι σημεία του κύκλου με κέντρο O . Αν E είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του A να αποδείξετε ότι:
- $B\Gamma \perp \Delta E$ και $\Delta\Gamma \perp BE$.
 - $EG \perp BD$



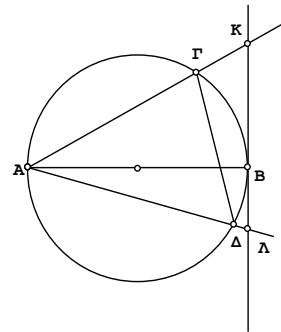
- 6.05 Δύο ορθογώνια τρίγωνα ABG και $B\Gamma\Delta$ έχουν κοινή υποτείνουσα BG και οι κορυφές A και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της. Αν E και Z οι προβολές των B και Γ στην ευθεία $A\Delta$ να δείξετε $AE = \Delta Z$.



- 6.06 Δίνονται οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Ευθεία που διέρχεται από το A τέμνει τους κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν ϵ είναι η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο B , να αποδείξετε ότι $\Gamma\Lambda \perp \epsilon$

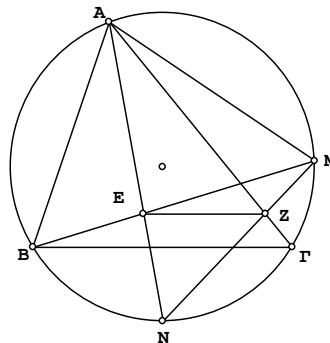


- 6.07** Δίνεται κύκλος (O,R) και διάμετρος AB . Εκατέρωθεν της AB φέρουμε τυχαίες χορδές AG και AD , οι οποίες τέμνουν την εφαπτομένη του κύκλου B στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $KL\Delta G$ είναι εγγράψιμο.



- 6.08** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, ο περιγεγραμμένος κύκλος (O,R) και τυχαίο σημείο M του τόξου AG . Αν N είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$, οι MB και AN τέμνονται στο E και οι AG και MN τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι:

- A) Το τετράπλευρο $AMZE$ είναι εγγράψιμο.
B) $EZ//BG$

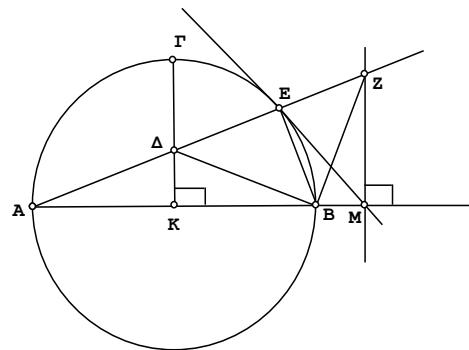


- 6.09** Δίνεται κύκλος (K,R) , διάμετρος AB και η ακτίνα $K\Gamma$ κάθετη στην AB . Τυχαία ευθεία που διέρχεται από το A τέμνει την $K\Gamma$ στο Δ και τον κύκλο στο E . Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο E τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο M και η κάθετη επί της AB στο M τέμνει την AE στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

Τα τετράπλευρα ΔKBE και $EBMZ$ είναι εγγράψιμα.
Η γωνία ΔBZ είναι ορθή.

- 6.10** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $(\hat{A} = 90^\circ)$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Στο σημείο Δ φέρνουμε την κάθετη στην $B\Gamma$ η οποία τέμνει την AG στο E . Αν ΔZ και ΔH είναι οι αποστάσεις του Δ από τις AG και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

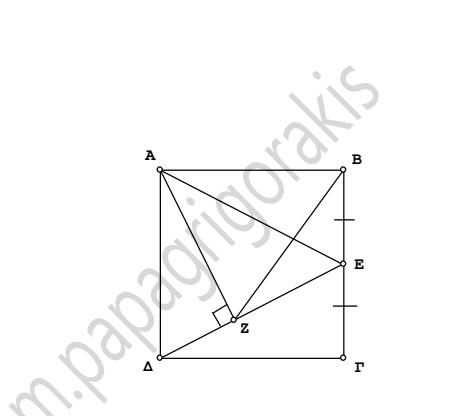
- A) $\Delta Z = \Delta H$.
B) Το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι εγγράψιμο.
Γ) $\Delta B = \Delta E$.



- 6.11** Έστω E το μέσον της πλευράς $B\Gamma$ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

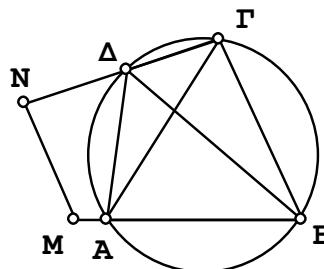
Φέρνουμε AZ κάθετη στη ΔE . Να αποδείξετε ότι:

- A) Τα τρίγωνα ABE και ΔGE είναι ίσα.
B) Το τετράπλευρο $AZEB$ είναι εγγράψιμο.
Γ) $BZ = BA$

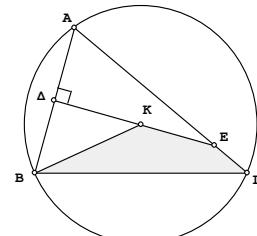


6.12 Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Στην ημιευθεία BA παίρνουμε τμήμα $BM=BD$ και στη $\Gamma\Delta$ τμήμα $\Gamma N=\Gamma A$. Να αποδείξετε ότι:

- A) Τα σημεία A, M, N και Δ είναι ομοκυκλικά.
- B) $MN \parallel BG$.



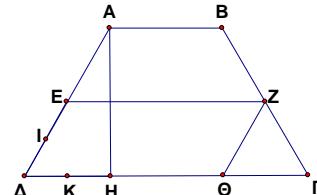
6.13 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο K . Από το K φέρνουμε ευθεία κάθετη στην AB η οποία τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BGEK$ είναι εγγράψιμο.



6.14 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με γωνίες $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$.

Έστω EZ η διάμεσος του και AH το ύψος του. Από το Z φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά AD που τέμνει την πλευρά AG στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

- A) Το τετράπλευρο $H\Theta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- B) Αν K, I είναι τα μέσα των τμημάτων ΔH , ΔE αντίστοιχα τότε το τετράπλευρο $IKHE$ είναι εγγράψιμο.

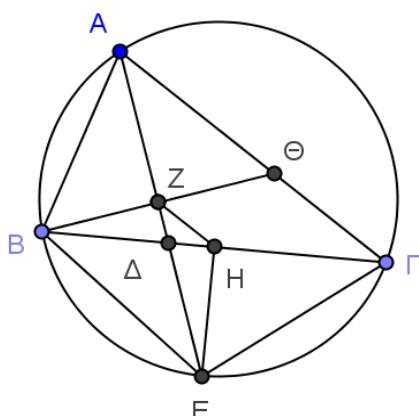


6.15 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος AD αυτού. Φέρνουμε από το Δ κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο Z και την AB στο P . Να αποδείξετε ότι $\Delta Z=\Delta B$ και $\Delta P=\Delta \Gamma$

6.16 Δίνεται κύκλος (K, r) . Αν AB μια χορδή του κύκλου (K, r) και M το μέσο του τόξου AB να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του M από τις ακτίνες KA και KB είναι ίσες με το μισό του μήκους της χορδής

6.17 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και φέρνουμε τη διχοτόμο AK . Αν η κάθετη από το K προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AG στο Λ και την AB στο M , να αποδείξετε ότι $KB=KL$ και $KM=KG$

6.18 Κύκλος με κέντρο K εφάπτεται σε άλλον κύκλο με κέντρο Λ στο σημείο A . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο K στο σημείο B . Αν η BA τέμνει τον κύκλο Λ στο σημείο Γ , να αποδείξετε ότι $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$.



6.19 Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και η διχοτόμος του AD τέμνει τον κύκλο στο E .

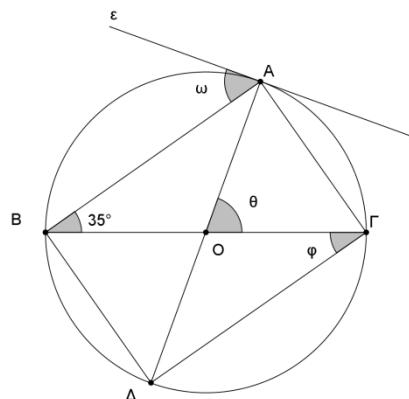
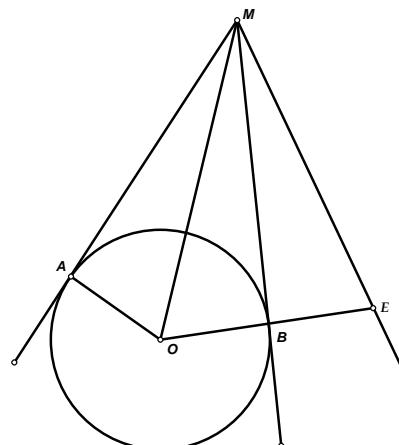
Θεωρούμε ακόμη τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Theta$ και EH ώστε $B\Theta \perp AD$ και $EH \perp BG$.

- A) Αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- B) Να δείξετε την ισότητα $AB=A\Theta$.
- C) Αποδείξετε ότι είναι $ZH \parallel AG$.

$$\Delta) \quad \text{Να δείξετε την ισότητα } ZH = \frac{AG - AB}{2}$$

- 6.20** Στο διπλανό σχήμα BG , AD είναι διάμετροι και ε εφαπτομένη του κύκλου. Να υπολογίσετε:

- a) τη γωνία θ
 β) τη γωνία φ
 γ) τη γωνία ω.



- 6.21** Από σημείο M εξωτερικό κύκλου (O, R) φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA , MB του κύκλου. Προεκτείνουμε το OB κατά τμήμα $BE=OB$.

- A Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OME είναι ισοσκελές

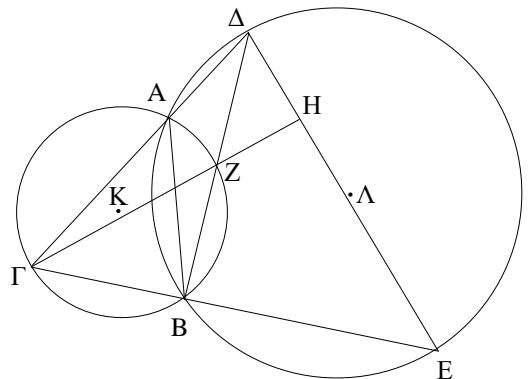
- B Να αποδείξετε ότι: $\hat{AME} = 3 \cdot \hat{BME}$

- Γ Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

6.22 Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) με $\rho_2 > \rho_1$, που τέμνονται στα A και B. Έστω Γ τυχαίο σημείο του (K, ρ_1) και AB η κοινή χορδή. Οι χορδές ΓA και ΓB προεκτεινόμενες τέμνουν τον κύκλο (Λ, ρ_2) στα Δ και Ε αντίστοιχα, η ΔΒ τέμνει τον (K, ρ_1) στο Z και η προέκταση της ΓΖ τέμνει την ΔΕ στο H.

- A) Να αποδείξετε ότι : $\hat{BA}\Gamma = \Delta\hat{ZH}$.

B) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ZBEH είναι εγγράψιμο.



6.23 Σε επίπεδο, θεωρούμε ευθ. τμήμα AG με μήκος 10cm , Ο το μέσο του AG και τα σημεία B και Δ έτσι ώστε : να βρίσκονται εκατέρωθεν της AG ,

$$QB = Q\Delta = 5\text{cm}$$

$$A\hat{G}\Delta = \frac{1}{2} \tau \eta \varsigma \text{ opθής και } A\hat{G}B = 30^\circ.$$

Να δείξετε ότι

- A το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.
 B $AB = 5\text{cm}$ και $A\Delta = \Delta\Gamma$
 Γ αν M το μέσο της $B\Delta$ τότε $OM \perp B\Delta$
 Δ $O\hat{B}\Delta = A\hat{O}M = 15^\circ$.

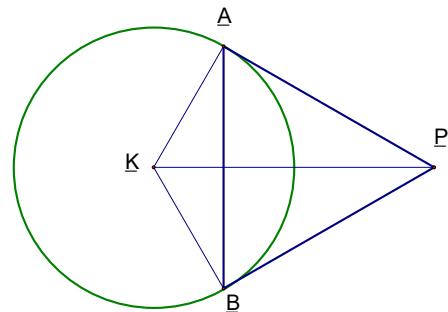
6.24 Σε ένα τρίγωνο ABG είναι $BG = 2 AB$. Έστω M το μέσο της πλευράς BG . Στην πλευρά AG παίρνουμε τα σημεία N και P έτσι ώστε $AN = NP = PG$. Να αποδειχθεί ότι:

- A) $MP // BN$
- B) Η ευθεία BN διέρχεται από το μέσο του AM
- Γ) Η BN είναι κάθετη στην AM .
- Δ) Η γωνία AMP είναι ορθή.
- Ε) Αν η γωνία MAF είναι ίση με 30° , τότε $BN = 2PG$.

6.25 Έστω (K, ρ) κύκλος και σημείο P , στο επίπεδό του, τέτοιο ώστε $KP = 2\rho$. Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB .

Να αποδείξετε ότι:

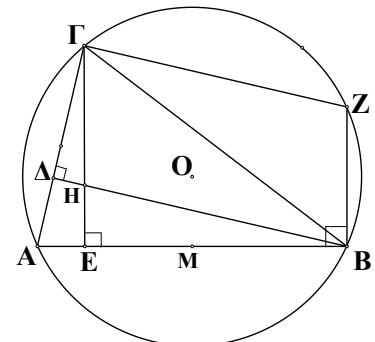
- A. $\hat{APK} = 30^\circ$
- B. $\hat{AKB} = 120^\circ$
- Γ. το PAB είναι ισόπλευρο



6.26 Σε τρίγωνο ABG είναι $A = 3\Gamma$ και $B = 2\Gamma$

- A) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABG
- B) Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου ABG και ΔAM τότε :

 - i) Να αποδείξετε ότι $\Delta AM = 30^\circ$
 - ii) Να αποδείξετε ότι $BD = \frac{BG}{4}$



6.27 Στο διπλανό σχήμα είναι (O,R) ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο ABG , κύκλος, $B\Delta$, GE τα ύψη του ABG και $BZ \perp AB$. Να δείξετε ότι:

- A η AZ διάμετρος του κύκλου
- Β το $BH\Gamma Z$ παραλληλόγραμμο,
- Γ Το $OM = \frac{1}{2}\Gamma H$, M το μέσο της AB