ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πέμπτη 23/02/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **(Μονάδες 7)**

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; **(Μονάδες 4)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ισχύει $g \circ f = f \circ g$.

(β) Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$.

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της.

(δ) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \ne \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

(ε) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ ή -1.

(Μονάδες 10)

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι 1 – 1 είναι και γνησίως μονότονη».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xf(x) + \eta\mu x}{x^2} = 1$ και $(f(x))^2 = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$. **(Μονάδες 6)**

Β2. Να αποδείξετε ότι $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{x+2}}{x+1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2, 0). **(Μονάδες 6)**

Β4. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή, συνεχής στο 0 και τέτοια, ώστε
$x^2 f(x) \le \eta\mu^3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. **(Μονάδες 4)**

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu^3 x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. **(Μονάδες 8)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο Ο(0,0). **(Μονάδες 7)**

Γ4. Αν $y=x$ η παραπάνω εφαπτομένη να αποδείξετε ότι εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^{\eta\mu x}, x>0$ στο σημείο $M\left(\dfrac{\pi}{2}, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0\le x\le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$, $\mu\varepsilon\ \alpha<-3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3). **(Μονάδες 6)**

Δ2. (α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3) .

(β) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

(Μονάδες 6)

Δ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

(Μονάδες 6)

Δ4. Θεωρούμε σημείο Α(x, 1) της ευθείας y = 1 με x > 0. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(x, 1) και Ο(0,0) ως προς x, όταν x = 1. **(Μονάδες 7)**

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.
Καλή τύχη!