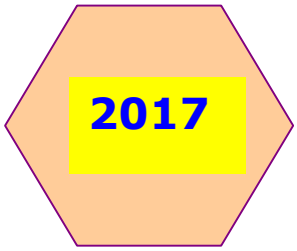
Μπάμπης Στεργίου

Διαγωνισμός Αρχιμήδης

Juniors-Μικροί

Ασκήσεις στη Γεωμετρία

*** Αφιερωμένο στους μαθητές και τους συναδέλφους



Οι εκφωνήσεις των ασκήσεων

Α. Τρίγωνα – τετράπλευρα

ArJun.1 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε τμήμα $\Gamma E = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta E$.

ArJun.2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, σημείο Ε στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ζ στην πλευρά ΒΓ, ώστε $BE = BZ$. Η κάθετη ΒΚ από το Β προς την ΓΕ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma E = BH$ και $\Gamma E \perp BH$.

β) Το ΔΗΖΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Η γωνία $\Delta\hat{K}Z$ είναι ορθή.

ArJun.3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της ΒΓ, μια ημιευθεία Αx στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}$ που δεν διέρχεται από το Μ και οι προβολές Δ, Ε των σημείων Β και Γ πάνω στην Αx. Να αποδείξετε ότι:

$$M\Delta = ME .$$

ArJun.4 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ. Η κάθετη προς την ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΓΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Β, Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ArJun.5 Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Η ευθεία ΔΜ τέμνει την ευθεία ΓΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ArJun.6 Στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ. Στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ έτσι, ώστε:

$$\Delta\hat{A}B = 2\Gamma\hat{\Delta}E \text{ και } \Delta\hat{A}\Gamma = 2B\hat{\Delta}Z .$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

ArJun.7 Στο εσωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ υπάρχει ένα σημείο Μ, ώστε:

$$M\hat{B}\Gamma = 30^o \text{ και } M\hat{A}B = \frac{3}{4}B\hat{A}\Gamma .$$

Να αποδείξετε ότι $A\hat{M}\Gamma = 150^o$.

ArJun.8 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\hat{B} = 30^o \text{ και } \hat{\Gamma} = 45^o$$

Αν Ε είναι το συμμετρικό του Β ως προς το σημείο Γ, να αποδειχθεί ότι $\hat{E} = 15^o$.

(Vrenceanu – 2006)

ArJun.9 Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 40^o$. Στο εσωτερικό του ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\Delta\hat{A}\Gamma = 10^o$ και $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\Gamma}A = 20^o$.

ArJun.10 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας ΑΒΔ και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = AE + \Gamma\Delta$.

(Sperante Olympia – 2010)

ArJun.11 Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα έτσι, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΕ, ΓΔ και η ευθεία ΜΝ τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ζ και Η, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

(Βουλγαρία – 2002)

ArJun.12 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^o$. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $A\hat{B}\Delta = 10^o$.

ArJun.13 Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το μέσο Μ του ΑΒ, το μέσο Ν του ΑΓ και η προβολή Ρ του Δ στην ευθεία ΓΜ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{P}N = A\hat{B}\Gamma$.

ArJun.14 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$, το ύψος ΑΔ, τυχαίο σημείο Ρ του τμήματος ΑΔ, η κάθετη προς την ΒΡ στο Ρ που τέμνει την ευθεία ΓΑ στο Ε και η παράλληλη από το Ρ προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι $AE = \Gamma Z$.

ArJun.15 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν των πλευρών ΓΔ, ΓΒ αντίστοιχα έτσι, ώστε $M\hat{A}\Delta = M\hat{A}N$. Στην προέκταση της ΝΒ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = AM$. Αν η ευθεία ΑΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ρ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΡ είναι ορθογώνιο.

β) $\Delta M + BN = \frac{PE}{2}$.

γ) $AN = M\Delta + NB$.

(Arad – 2008)

ArJun.16 Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Έστω Ν το μέσο του ΓΔ και Μ το μέσο του ΒΓ. Εξωτερικά του ΑΒΓΔ θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΝΖ. Να αποδειχθεί ότι:

$$E\hat{M}Z = 90^o .$$

ArJun.17 Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ φέρουμε τη διάμεσο ΒΜ. Η κάθετη από το Α προς τη ΒΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Δ. Να αποδειχθεί ότι $B\Delta=2\Delta\Gamma$.

ArJun.18 Στο εξωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A}=120^o$ θεωρούμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΔ, ΑΓΕ με $B\hat{A}\Delta=A\hat{\Gamma}E=90^o$. Να αποδειχθεί ότι:

$$B\hat{\Delta}E=90^o.$$

(Ρουμανία – 2006)

ArJun.19 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και οι κύκλοι $C_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $R_1=AB$) και $C_2(A, A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $R_2=A\Gamma$). Ο κύκλος $C_1(A, AB)$ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $C_2(A, A\Gamma)$ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν.

α) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΔΕΚΝ είναι ορθογώνιο.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\Gamma A=\Gamma B$ και $\hat{\Gamma}=30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΚΝ είναι τετράγωνο.

(Θαλής – 2010)

ArJun.20 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τα σημεία Μ, Ν έτσι, ώστε $AM=BN$. Η κάθετη από το Α προς την ΓΜ τέμνει τις ΓΜ, ΓΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

α) $A\hat{Z}\Gamma=B\hat{Z}N$,

β) $\Delta\hat{E}Z=45^o$, όπου Δ είναι το μέσο του ΒΓ.

ArJun.21 Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά α παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν έτσι, ώστε $AK+AN+\Gamma\Lambda+\Gamma M=2\alpha$. Να αποδειχθεί ότι η ΚΜ είναι κάθετη στη ΛΝ.

ArJun.22 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=90^o$ και $\hat{A}<45^o$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα και σημείο Μ διαφορετικό από το Α στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{M}Z=\hat{A}$.

β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{B}E$.

(ΕΜΕ, Ευκλείδης – 2011, 2012)

Β. Κύκλος – εγγράψιμα

ArJun.23 να τρίγωνο ΑΒΓ με $AB\neq A\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Β τέμνει την ευθεία ΑΓ στο σημείο Κ. Έστω Ε το αντιδιαμετρικό του Α. Η κάθετη από το Κ προς την ευθεία ΑΕ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΓΚ στο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$.

ArJun.24 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Β, Γ τέμνονται στο Δ. Η κάθετη από το Δ προς την ευθεία ΟΑ τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΔΒΕ, ΔΓΖ είναι ισοσκελή.

β) $\Delta E=\Delta Z$.

ArJun.25 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=60^o$. Αν Η είναι το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο του τριγώνου, να αποδειχθεί ότι η ΗΟ διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\hat{H}\Delta$, όπου ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

ArJun.26 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^o)$ και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Θαλής – 2010)

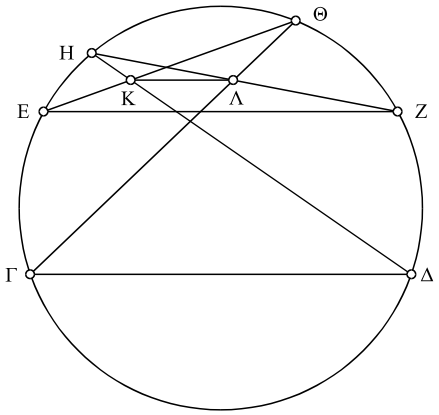
ArJun.27 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνομε σημείο Ε, ώστε $\Gamma E=\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $ZA=Z\Delta$.

ArJun.28 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και η διχοτόμος ΑΔ. Η ευθεία ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε. Ο κύκλος με διάμετρο ΔΕ ξανατέμνει τον κύκλο στο Ζ. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να αποδειχθεί ότι $Z\hat{A}B=M\hat{A}\Gamma$.

ArJun.29 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ορθόκεντρο Η και περίκεντρο Ο η διχοτόμος ΑΔ είναι κάθετη στην ΟΗ. Να αποδειχθεί ότι $\hat{A}=60^o$.

(Ρουμανία – 1987)

ArJun.30 Στο παρακάτω σχήμα οι χορδές ΓΔ και ΕΖ είναι παράλληλες. Τα σημεία Η, Θ του τόξου $\overset{\frown}{EZ}$ είναι τυχαία. Τα τμήματα ΕΘ, ΔΗ τέμνονται στο Κ και τα τμήματα ΖΗ, ΓΘ τέμνονται στο Λ. Να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΚΛ και ΓΔ είναι παράλληλα.



ArJun.31 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθόκεντρο Η, το μέσο Μ του ΑΒ, το μέσο Ν του ΗΓ και το σημείο τομής Σ των διχοτόμων των γωνιών $H\hat{B}\Gamma$, $H\hat{A}\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Μ, Σ, Ν είναι συνευθειακά.

ArJun.32 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^o$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ, ΓΕ. Να αποδειχθεί ότι:

α) $I\Delta = IE$.

β) $BE + \Gamma\Delta = B\Gamma$.

ArJun.33 Δύο κύκλοι C_1, C_2 τέμνονται στα σημεία Α και Β. Μια ευθεία που διέρχεται από το Β τέμνει τους κύκλους στα Γ και Δ. Η ευθεία ΑΒ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΓΔ στο σημείο Ν. Οι ευθείες ΝΓ, ΝΔ τέμνουν τους κύκλους C_1, C_2 στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδειχθεί ότι:

α) τα σημεία Ε, Β, Ζ είναι συνευθειακά.

β) τα σημεία Α, Ε, Ν, Δ είναι ομοκυκλικά.

ArJun.34 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O,R). Η διχοτόμος ΑΔ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τριγώνου τέμνει τον κύκλο στο Κ. Ένας κύκλος C_1 που έχει το κέντρο του στην ακτίνα ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α, Δ τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ είναι το μέσο του ΓΖ, να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ συντρέχουν.

(ΕΜΕ, Αρχιμήδης – 2012)

ArJun.35 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εκτός αυτού τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ. Οι ευθείες ΒΔ, ΑΓ τέμνονται στο Η. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α, Η, Ζ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Αρχιμήδης – 2006)

ArJun.36 Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB < A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Από το σημείο Α φέρνουμε τις δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα $r = OM$ (Μ είναι το μέσο της ΒΓ). Η μία εφαπτομένη εφάπτεται στον κύκλο (c_1) στο σημείο Τ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν και τον κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $BN < BM$). Η άλλη εφαπτομένη εφάπτεται στον κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ και τον κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\Gamma K < \Gamma M$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες BN_1, ΓK_1 και ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

ArJun.37 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (C) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (C_1)) τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και τη ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (C_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (C_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (C_1), (C_2) και (C_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

(ΕΜΕ, Ευκλείδης – 2011)

ArJun.38 Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο σημεία Γ, Δ αυτού. Οι εφαπτομένες στα σημεία Γ, Δ τέμνονται στο Ε, ενώ οι ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Ζ. Αν η ΕΖ τέμνει την ΑΒ στο Μ, να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ε, Γ, Μ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(Κίνα – 2010 (CWMO))

ArJun.39 Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Φέρουμε τη διχοτόμο ΓΔ και την κάθετη από το Ο προς την ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς την ΓΔ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδειχθεί ότι $AE = Z\Delta$.

ArJun.40 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ, η προβολή Ε του Β στη διαγώνιο ΑΓ, το μέσο Μ του ΑΕ και το μέσο Ν του ΓΔ. Να αποδειχθεί ότι η γωνία $B\hat{M}N$ είναι ορθή.

ArJun.41 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Το ύψος του ΑΔ τέμνει τον περιγεγγραμμένο κύκλο στο σημείο Ζ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΖ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ευθεία ΕΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Κ, και η ευθεία ΖΚ την ΒΓ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμο τμήματος ΒΛ.

(Θαλής – 2010)

ArJun.42 Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Οι ευθείες ΚΒ, ΛΒ τέμνουν τους κύκλους (Λ), (Κ) στα σημεία Ζ, Ε αντίστοιχα. Μια παράλληλη από το Β προς την ΕΖ τέμνει τους κύκλους στα σημεία Μ και Ν. Να αποδειχθεί ότι:

$$MN = AE + AZ.$$

(Ρωσία – 1995)

Γ. Θεώρημα Θαλή – Ομοιότητα

ArJun.43 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$ και το μέσο Μ του ΓΔ. Η ΑΓ τέμνει τη ΒΜ στο Ε και η ΒΔ τέμνει την ΑΜ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $ZE // \Gamma\Delta$.

ArJun.44 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Οι κάθετες προς τη ΒΓ στα σημεία Β, Γ τέμνουν τις ευθείες ΓΖ, ΒΕ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $A\hat{\Delta}M = A\hat{\Delta}N$.

(Ρουμανία, Albu – 2007)

ArJun.45 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος ΑΔ, η διχοτόμος ΑΕ και το έγκεντρο Ι του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Αν Θ είναι η προβολή του Ι στην ΑΓ και η κάθετη στο Α προς την ΑΓ τέμνει την ευθεία ΕΘ στο σημείο Η, να αποδειχθεί ότι $AH = A\Delta$.

(ΕΜΕ, Αρχιμήδης Junior – 2001)

ArJun.46 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα Β, Γ τέμνονται στο Δ. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\Delta\hat{A}B = M\hat{A}\Gamma .$$

ArJun.47 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν των πλευρών ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα, ώστε $BM = \Gamma N$. Οι ΑΒ, ΔΜ τέμνονται στο Ε, οι ΑΔ, ΒΝ τέμνονται στο Ζ και οι ΒΖ, ΔΕ τέμνονται στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι:

α) τα σημεία Ε, Γ, Ζ βρίσκονται στην ίδια ευθεία,

β) $AP \perp MN$,

γ) $ZE \perp AP$.

(Ρουμανία – 2006, Bacau VII)

ArJun.48 Στην υποτείνουσα ΒΓ ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν έτσι, ώστε $MN^2 = BM^2 = \Gamma N^2$, όπου τα Β, Μ, Ν, Γ είναι μ' αυτή τη σειρά. Να αποδειχθεί ότι $M\hat{A}N = 45^o$.

ArJun.49 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Η κάθετη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ε και την ΑΜ στο σημείο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $\Delta Z // AB$.

ArJun.50 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Ρ εσωτερικό σημείο του τριγώνου, ώστε $P\hat{B}\Gamma = P\hat{\Gamma}A$. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

$$B\hat{P}M + A\hat{P}\Gamma = 180^o .$$

ArJun.51 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στη διαγώνιο ΑΓ. Έστω Ζ, Η οι προβολές του Ε στις ΔΓ, ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE \perp HZ$,

β) τα σημεία Ρ, Ε, Β είναι συνευθειακά, όπου Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΓΗ.

ArJun.52 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθεία παράλληλη στην ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ε και την πλευρά ΒΓ στο Ζ. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ΒΓ στο Θ και η ΑΖ τέμνει τη ΔΓ στο Η. Να αποδειχθεί ότι:

α) $EZ // \Theta H$.

β) η ευθεία ΑΓ διχοτομεί το τμήμα ΘΗ.

ArJun.53 Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // \Gamma\Delta$) είναι $\Delta\Gamma = \Delta B$. Οι διαγώνιες τέμνονται στο Ε. Η παράλληλη από το Ε προς τη ΓΔ τέμνει την ΑΔ στο Η. Να αποδειχθεί ότι:

α) η ΒΗ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{B}\Delta$,

β) η γωνία $H\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή.

ArJun.54 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Μ, ώστε $BM = B\Gamma$. Μια ευθεία που διέρχεται από το Δ τέμνει το τμήμα ΜΒ στο Ε, τη ΜΓ στο Η και την ευθεία ΓΒ στο Λ. Η ευθεία ΒΗ τέμνει την ΑΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{H\Delta}{H\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Lambda}$, β) $\frac{\Delta Z}{B\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Lambda}$,

γ) $AZ = ME$.

ArJun.55 Στην πλευρά ΑΒ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ε. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΓΒ στο Ζ. Η ευθεία ΓΕ τέμνει την ΑΖ στο Η. Να αποδειχθεί ότι:

$$BH \perp \Delta Z .$$

(Ρουμανία – 2012)

ArJun.56 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Τ έτσι, ώστε $T\Gamma = 2TB$. Η διχοτόμος της $A\hat{T}B$ τέμνει την ΑΒ στο Δ. Αν η ΓΔ τέμνει την ΑΜ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

$$TE \perp T\Delta .$$

(Ρουμανία – 2013, shortlist)

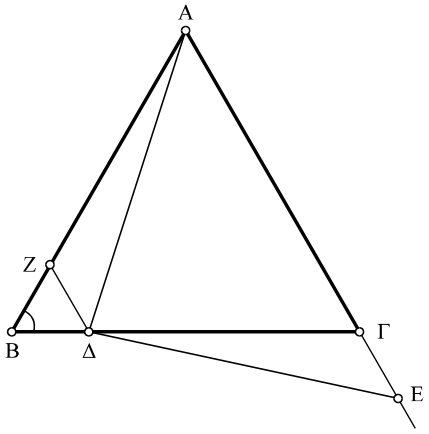
Οι λύσεις των ασκήσεων

Μπάμπης Στεργίου

Α: Τρίγωνα – τετράπλευρα

ArJun.1 Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BZ = B\Delta$. Επειδή $\hat{B} = 60^o$ και $B\Delta = = BZ$, το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισόπλευρο Επομένως:

$$\Delta Z = \Delta B = \Gamma E .$$



Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΕ είναι ίσα, διότι:

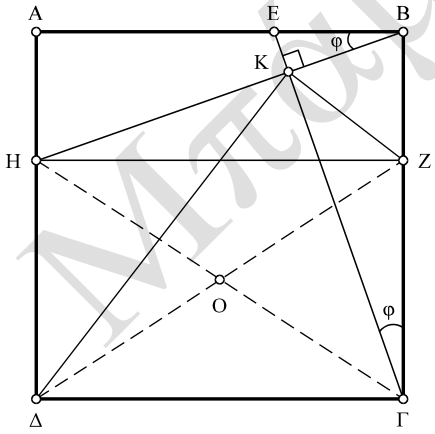
- $\Delta Z = \Gamma E$,
- $AZ = \Gamma\Delta$, ως διαφορές ίσων τμημάτων,
- $A\hat{Z}\Delta = 120^o = \Delta\hat{\Gamma}E$.

Άρα θα είναι και $\Delta A = \Delta E$.

ArJun.2 α) Παρατηρούμε καταρχήν ότι $A\hat{B}H = B\hat{\Gamma}E$, διότι είναι συμπληρωματικές της γωνίας $B\hat{E}\Gamma$ (ή διότι είναι οξείες και έχουν τις πλευρές τους κάθετες).

Τα ορθογώνια τρίγωνα λοιπόν ΑΒΗ και ΒΓΕ έχουν:

- $AB = B\Gamma$,
- $A\hat{B}H = B\hat{\Gamma}E$.



Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε $BH = \Gamma E$. Είναι επίσης $B\hat{E}\Gamma = A\hat{H}B$, οπότε:

$$A\hat{B}H + \Gamma\hat{E}B = A\hat{B}H + A\hat{H}B = 90^o ,$$

διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή $\overset{\Delta}{ABH} = \overset{\Delta}{\Gamma BE}$, παίρνουμε ότι:

$$AH = BE = BZ .$$

Επειδή $A\Delta = B\Gamma$ και $AH = BZ$, θα είναι $\Delta H = \Gamma Z$. Όμως $\Delta H \,//\, \Gamma Z$, οπότε το ΓΔΗΖ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει και μία ορθή γωνία (π.χ. την $\hat{\Delta}$), θα είναι ορθογώνιο.

γ) Έστω ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου ΓΔΗΖ τέμνονται στο σημείο Ο. Το Ο είναι κοινό μέσο των ΗΓ, ΔΖ και $H\Gamma = \Delta Z$.

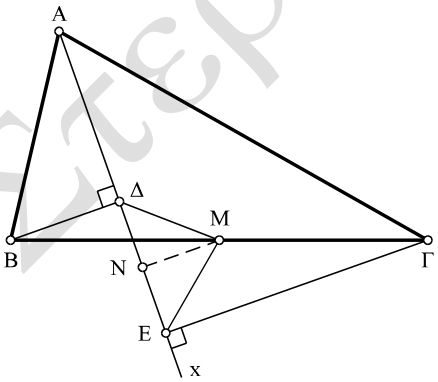
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΚΓ είναι:

$$KO = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{\Delta Z}{2} .$$

Αφού στο τρίγωνο ΔΚΖ η διάμεσος ΚΟ είναι ίση με το μισό της πλευράς ΔΖ, αυτό είναι ορθογώνιο. Άρα $\Delta\hat{K}Z = 90^o$.

ArJun.3 Έστω Ν το μέσο του ΔΕ. Στο τραπέζιο ΒΔΓΕ το τμήμα ΜΝ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ΒΓ και ΔΕ. Άρα:

$$MN \,//\, B\Delta \,//\, \Gamma E .$$



Όμως $B\Delta \perp AE$, οπότε $MN \,//\, B\Delta$. Άρα $MN \perp \Delta E$ και έτσι ΜΝ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Επομένως $M\Delta = ME$.

ArJun.4 Φέρνουμε τη ΜΓ. Τότε:

$$\overset{\Delta}{A\Delta M} = \overset{\Delta}{B\Gamma M} ,$$

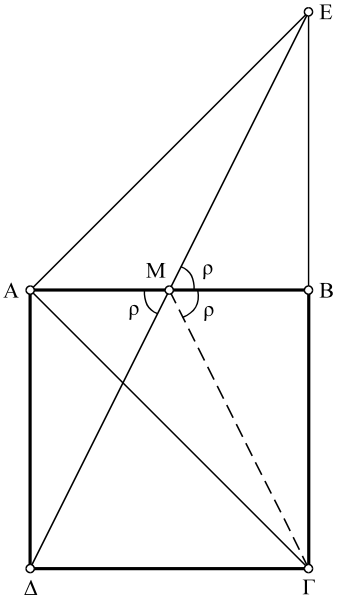
οπότε:

$$B\hat{M}E = A\hat{M}\Delta = B\hat{M}\Gamma = \rho .$$

Επομένως $A\hat{M}E = A\hat{M}\Gamma$ και έτσι:

$$\overset{\Delta}{AME} = \overset{\Delta}{AM\Gamma} .$$

Μπάμπης Στεργίου



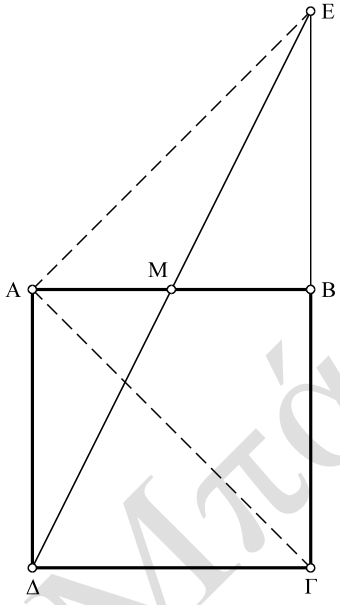
Άρα $AE = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Έτσι:

$$A\hat{\Gamma}E = 45^o = A\hat{\Gamma}B .$$

Αυτό σημαίνει ότι τα Γ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

ArJun.5 Είναι $\overset{\Delta}{AM\Delta} = \overset{\Delta}{MBE}$, οπότε:

$$BE = A\Delta = AB .$$

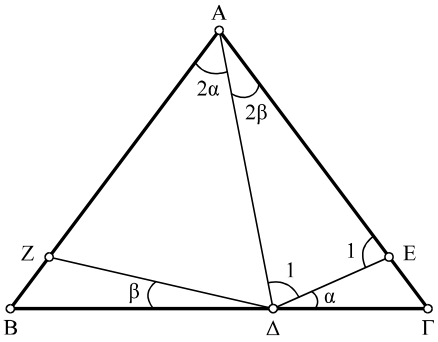


Στο $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ η ΑΒ είναι λοιπόν ύψος και διάμεσος, οπότε $A\Gamma = AE$. Αφού:

$$AB = BE = E\Gamma ,$$

το $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ είναι ισοσκελές.

ArJun.6 Έστω $E\hat{\Delta}\Gamma = \alpha$ και $Z\hat{\Delta}B = \beta$.

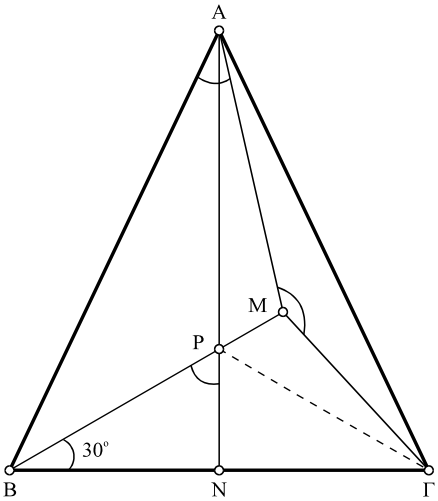


Είναι:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^o - \hat{A}}{2} = \dfrac{180^o - 2\alpha - 2\beta}{2} =$
  $= 90^o - \alpha - \beta$ (1).
- $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}A \overset{(1)}{=} 2\beta + (90^o - \alpha - \beta) =$
  $= 90^o - \alpha + \beta$ (2).
- $A\hat{\Delta}E = 180^o - A\hat{\Delta}B - E\hat{\Delta}\Gamma \overset{(2)}{=}$
  $= 180^o - (90^o - \alpha + \beta) - \alpha =$
  $= 90^o + \alpha - \beta - \alpha = 90^o - \beta .$
- $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma + E\hat{\Gamma}\Delta \overset{(1)}{=} \alpha + (90^o - \alpha - \beta) =$
  $= 90^o - \beta .$

Άρα $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 90^o - \beta$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Έτσι $A\Delta = AE$. Όμοια είναι $A\Delta = AZ$, οπότε $AZ = AE$.

ArJun.7 Φέρνουμε το ύψος ΑΝ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ που τέμνει την ΜΒ στο Ρ. Είναι τότε:



- $P\hat{B}N = P\hat{\Gamma}N = 30^o$,
- $B\hat{P}N = N\hat{P}\Gamma = 60^o$,
- $M\hat{P}\Gamma = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.

Άρα $M\hat{P}\Gamma = M\hat{P}A$, οπότε η ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{P}\Gamma$.

Επειδή $M\hat{A}B = \dfrac{3}{4}B\hat{A}\Gamma$, είναι:

$$M\hat{A}\Gamma = \frac{1}{4}B\hat{A}\Gamma ,$$

Μπάμπης Στεργίου

δηλαδή:

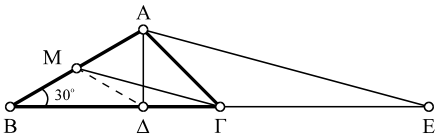
$$M\hat{A}\Gamma = \frac{1}{4}\cdot 2P\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}P\hat{A}\Gamma .$$

Άρα και η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $P\hat{A}\Gamma$, οπότε στο $\overset{\Delta}{PA\Gamma}$ το Μ είναι έγκεντρο. Άρα:

$$A\hat{M}\Gamma = 90^o + \frac{A\hat{P}\Gamma}{2} = 90^o + 60^o = 150^o .$$

ArJun.8 Έστω Μ το μέσο του ΑΒ και $A\Delta \perp B\Gamma$. Αφού $B = 30^o$, είναι:

$$\Delta A = \frac{AB}{2} = MA = M\Delta .$$



Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι έτσι ισόπλευρο και αφού $\Delta\Gamma = \Delta A$ $(\Delta\hat{\Gamma}A = 45^o)$, θα είναι:

$$\Delta\Gamma = \Delta M .$$

Επειδή:

$$\Gamma\hat{\Delta}M = 90^o + 60^o = 150^o$$

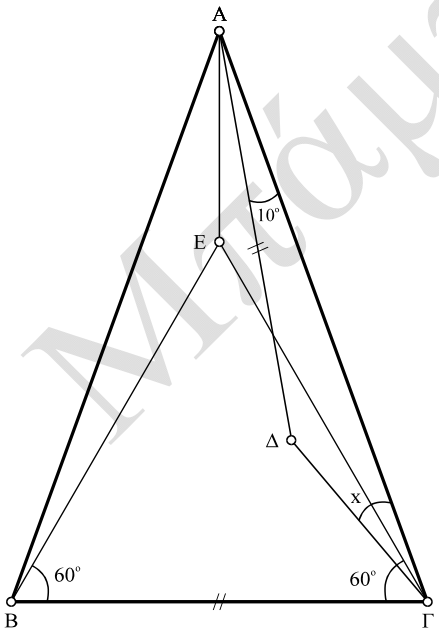
και $\Delta\Gamma = \Delta M$, είναι $\Delta\hat{\Gamma}M = \Delta\hat{M}\Gamma = 15^o$.

Στο τρίγωνο όμως ΑΒΕ το ΜΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε ΜΓ // ΑΕ. Άρα:

$$\hat{E} = M\hat{\Gamma}B = 15^o .$$

ArJun.9 Θεωρούμε στο εσωτερικό του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΕ. Είναι τότε:

$BE = B\Gamma = A\Delta$ και $A\hat{B}E = 10^o = \Delta\hat{A}\Gamma$.

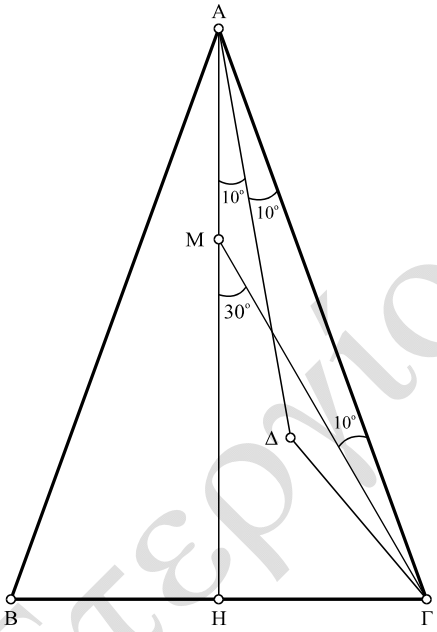


Άρα $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma} = \overset{\Delta}{ABE}$, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{A}E = 20^o$, διότι $B\hat{A}\Gamma = 40^o$ και η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Άλλος τρόπος

Αν Η είναι το μέσο του ΑΗ και Μ είναι σημείο του ΑΗ, ώστε $M\hat{\Gamma}A = 10^o$, τότε:

$$H\hat{M}\Gamma = M\hat{A}\Gamma + M\hat{\Gamma}A = 20^o + 10^o = 30^o$$



Στο ορθογώνιο λοιπόν τρίγωνο ΗΜΓ είναι:

$$M\Gamma = 2H\Gamma = B\Gamma = A\Delta .$$

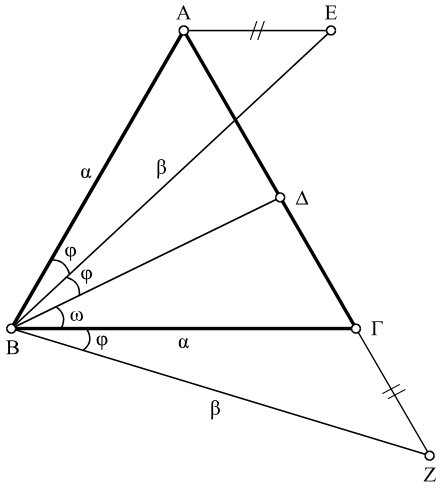
Άρα $\overset{\Delta}{AM\Gamma} = \overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$, διότι:

$A\Gamma$ – κοινή, $M\Gamma = A\Delta$, $M\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{A}\Gamma = 10^o$.

Άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = M\hat{A}\Gamma = 20^o$.

ArJun.10 Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε τμήμα $\Gamma Z = AE$. Είναι τότε:

$$\overset{\Delta}{ABE} = \overset{\Delta}{\Gamma BZ} ,$$



οπότε $A\hat{B}E = \Gamma\hat{B}Z = \varphi$ και $BZ = BE$. Είναι επομένως:

$$Z\hat{B}E = Z\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}E = \varphi + \omega + \varphi =$$

$$= 2\varphi + \omega = A\hat{B}\Gamma = 60^o .$$

- Στο $\overset{\Delta}{B\Gamma Z}$ είναι:

$$B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{B}Z + \Gamma\hat{Z}B \Leftrightarrow 60^o = \varphi + \hat{Z} \Leftrightarrow$$

Μπάμπης Στεργίου

$$\Leftrightarrow Z = 60^o - \varphi \qquad (1).$$

- Επειδή $E\hat{B}Z = 60^o$, παίρνουμε:

$$\Delta\hat{B}Z = E\hat{B}Z - E\hat{B}\Delta = 60^o - \varphi \quad (2).$$

Οι (1) και (2) δίνουν $\hat{Z} = \Delta\hat{B}Z$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές. Άρα:

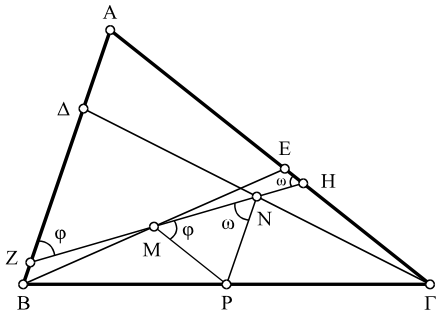
$$\Delta B = \Delta Z = \Delta\Gamma + \Gamma Z = \Gamma\Delta + AE .$$

ArJun.11 Έστω Ρ το μέσο του ΒΓ. Από τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΓΔΒ παίρνουμε ότι:

$$PM = \frac{E\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = PN .$$

Επομένως το τρίγωνο PMN είναι ισοσκελές, οπότε:

$$P\hat{M}N = P\hat{N}M \Leftrightarrow \varphi = \omega .$$

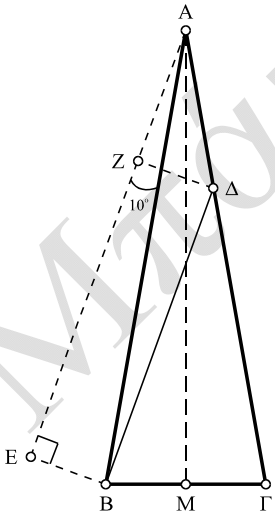


Όμως είναι $PN // BZ$, οπότε $A\hat{Z}H = Z\hat{N}P$ και $PM // A\Gamma$, οπότε $A\hat{H}Z = H\hat{M}P$. Αφού:

$$Z\hat{N}P = H\hat{M}P ,$$

είναι και $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z$. Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

ArJun.12 Δίνουμε μια ακόμα λύση στο πασίγνωστο αυτό θέμα.



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ με $B\hat{A}E = 10^o$ και $\hat{E} = 90^o$, στο εξωτερικό του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Έστω $\Delta Z \perp AE$. Είναι $Z\hat{A}\Delta = 30^o$, οπότε:

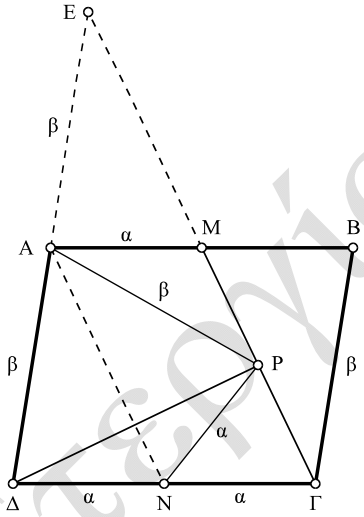
$$\Delta Z = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = BE ,$$

διότι $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{ABE}$. Το ΔΖΕΒ είναι λοιπόν ορθογώνιο, οπότε $Z\hat{\Delta}B = 90^o$. Επομένως:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}Z + Z\hat{\Delta}B = 60^o + 90^o = 150^o .$$

Άρα $\Delta\hat{B}A = 180^o - 20^o - 150^o = 10^o$.

ArJun.13 Έστω ότι η ΓΜ τέμνει την ΔΑ στο Ε. Έτσι $MA = MB$ και $AE // B\Gamma$, είναι $\overset{\Delta}{AME} = \overset{\Delta}{BM\Gamma}$, οπότε $AE = B\Gamma = A\Delta$.



- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΡΕ η ΡΑ είναι διάμεσος, οπότε $PA = \frac{\Delta E}{2} = A\Delta$.
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΔΓ η ΡΝ είναι διάμεσος, οπότε $PN = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Delta N$.
- Τα τρίγωνα ΡΑΝ και ΔΑΝ έχουν τις πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα. Άρα: $A\hat{P}N = A\hat{\Delta}N = A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$.

Ερώτημα β)

Να αποδειχθεί ότι $AN \perp \Delta P$.

Απάντηση

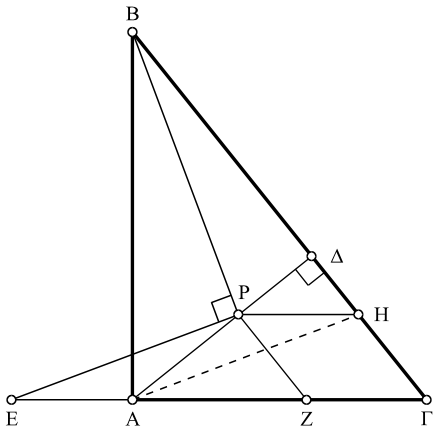
Αφού $N\Delta = NP$ και $A\Delta = AP$, η ΑΝ είναι μεσοκάθετος του ΔΡ.

Σχόλιο

Αφού $A\hat{P}\Delta = A\hat{\Delta}P$ και $N\hat{P}\Delta = N\hat{\Delta}P$, είναι $A\hat{P}N = A\hat{\Delta}N$.

ArJun.14 Φέρουμε τη $PH // A\Gamma$ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Το ΡΗΓΖ είναι προφανώς παραλληλόγραμμο, οπότε $Z\Gamma = PH$. Φέρουμε την ΑΗ. Επειδή:

Μπάμπης Στεργίου



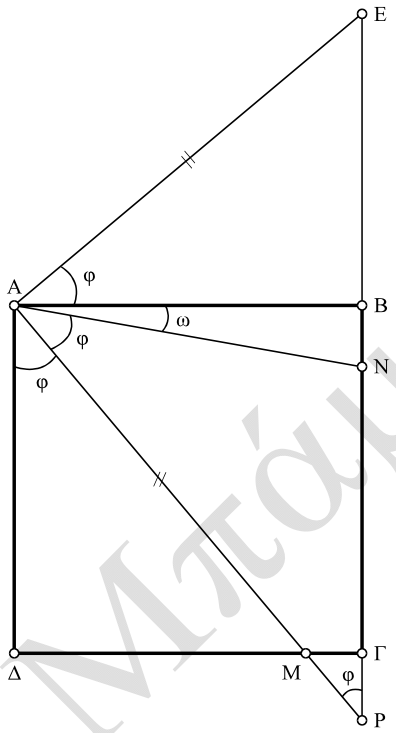
$$HP \perp AB \text{ και } A\Delta \perp B\Gamma,$$

το P είναι το ορθόκεντρο του $\overset{\Delta}{ABH}$. Επομένως $BP \perp AH$. Όμως $BP \perp EP$, οπότε:

$$AH \,//\, PE.$$

Άρα το PHAE είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE = PH = Z\Gamma$, δηλαδή $AE = \Gamma Z$.

ArJun.15 α) Είναι $\overset{\Delta}{A\Delta M} = \overset{\Delta}{ABE}$, οπότε $\Delta\hat{A}M = E\hat{A}B$. Έτσι:



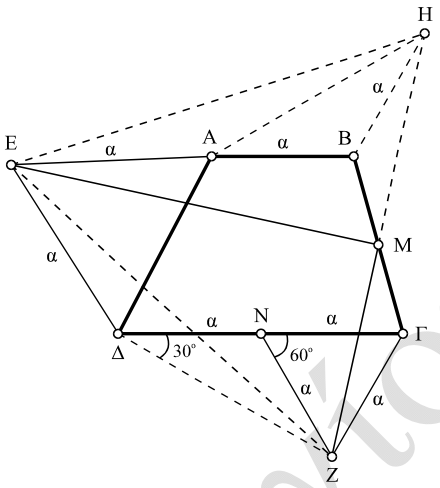
$$E\hat{A}P = E\hat{A}B + B\hat{A}P =$$
$$= \Delta\hat{A}M + B\hat{A}P = \Delta\hat{A}B = 90^o.$$

β) Είναι $\hat{P} = N\hat{A}P = \varphi$, οπότε το N είναι μέσο του EP και έτσι:

$$\Delta M + BN = EB + BN = EN = \frac{EP}{2}.$$

γ) Είναι $AN = \frac{EP}{2} \overset{(\beta)}{=} \Delta M + BN$.

ArJun.16 Έστω H το συμμετρικό του Z ως προς το M. Επειδή $AB = \Gamma N = N\Delta = \alpha$ και $BH = \Gamma Z = \Gamma N = \alpha$, είναι $\overset{\Delta}{ABH} = \overset{\Delta}{N\Delta Z}$. Άρα $AH = \Delta Z$. Έτσι $\overset{\Delta}{AEH} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, αφού:

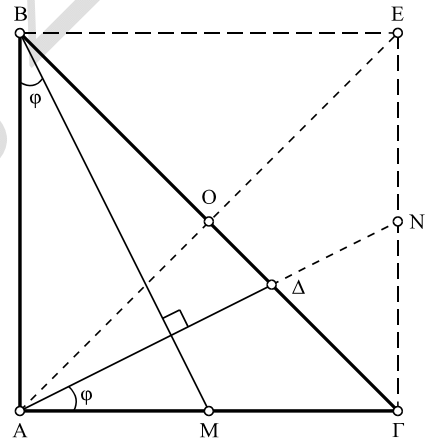


$$E\hat{A}H = E\hat{\Delta}Z = 270^o - \hat{A}$$

Επομένως $EH = EZ$ και αφού το M είναι μέσο του ZH, θα είναι $EM \perp ZH$.

ArJun.17 Σχηματίζουμε το τετράγωνο ABEΓ. Επειδή $A\Delta \perp BM$, είναι:

$$A\hat{B}M = \Gamma\hat{A}N = \varphi.$$



Άρα $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{A\Gamma N}$, διότι:

$$AB = A\Gamma \text{ και } A\hat{B}M = \Gamma\hat{A}N.$$

Επομένως $\Gamma N = AM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{E\Gamma}{2}$, που σημαίνει ότι το N είναι μέσο του ΓΕ.

Στο τρίγωνο ΓΑΕ οι ΑΝ, ΓΟ είναι διάμεσοι, οπότε το Δ είναι βαρύκεντρο. Άρα:

$$\Gamma\Delta = \frac{2}{3}\Gamma O = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\Gamma B = \frac{1}{3}\Gamma B,$$

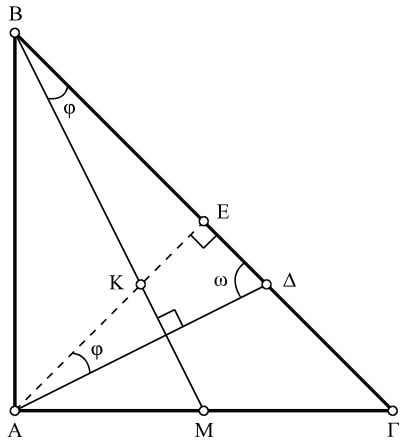
δηλαδή $\Gamma\Delta = \frac{1}{3}B\Gamma$. Άρα $B\Delta = 2\Delta\Gamma$.

Άλλος τρόπος

Φέρνουμε την $AE \perp B\Gamma$. Τότε το K είναι βαρύκεντρο στο τρίγωνο ABΓ και:

$$E\hat{B}K = E\hat{A}\Delta = \varphi$$

Μπάμπης Στεργίου



ως συμπληρωματικές της ω. Επειδή λοιπόν είναι και:

$$EB = \frac{B\Gamma}{2} = AE ,$$

είναι $\overset{\Delta}{EBK} = \overset{\Delta}{EA\Delta}$, οπότε $EK = E\Delta$. Άρα:

$$EK = \frac{1}{3}AE \Leftrightarrow E\Delta = \frac{1}{3}E\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{2}{3}E\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}B\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{1}{3}B\Gamma \Leftrightarrow \Delta B = 2\Delta\Gamma .$$

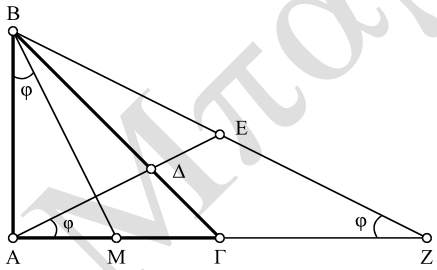
Σχόλιο

Αφού $EK = E\Delta$, είναι $E\hat{K}\Delta = 45^o = E\hat{A}\Gamma$, οπότε $K\Delta \,//\, A\Gamma$. Στο τρίγωνο ΒΜΓ θα είναι τότε $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{KB}{KM} = 2$, οπότε $\Delta B = 2\Delta\Gamma$.

Άλλος τρόπος

Στην προέκταση του ΑΓ παίρνουμε τμήμα $\Gamma Z = A\Gamma$. Επειδή $\frac{AB}{AM} = 2 = \frac{AZ}{AB}$, είναι:

$$\overset{\Delta}{ABM} \approx \overset{\Delta}{ABZ} .$$



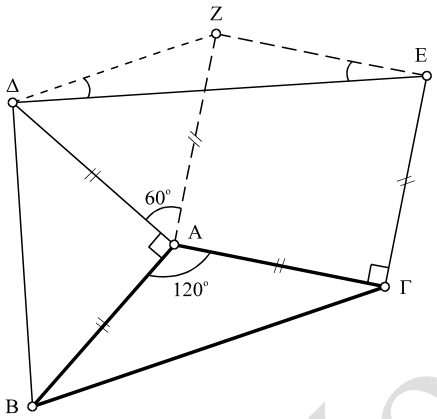
Άρα $A\hat{B}M = A\hat{Z}B = \varphi$, οπότε και:

$$E\hat{A}\Gamma = A\hat{Z}B = \varphi ,$$

διότι $E\hat{A}\Gamma = A\hat{B}M$, ως συμπληρωματικές της $A\hat{M}B$ (ή της $B\hat{A}E$).

Στο ορθογώνιο λοιπόν τρίγωνο ABZ η AE είναι διάμεσος, οπότε το Δ είναι βαρύκεντρο μια και οι AE, BΓ είναι διάμεσοι. Επομένως $\Delta B = 2\Delta\Gamma$.

ArJun.18 Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αφού $B\hat{A}\Gamma = 120^o$, είναι $\Delta\hat{A}Z = 60^o$ και έτσι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο. Άρα $\Delta\hat{Z}E = 150^o$, οπότε:



$$Z\hat{A}E = Z\hat{E}\Delta = \frac{180^o - 150^o}{2} = 15^o .$$

Επομένως, αφού $Z\hat{A}\Delta = 60^o$, παίρνουμε:

- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta - Z\hat{A}E = 60^o - 15^o = 45^o$.
- $B\hat{A}E = B\hat{A}\Delta + A\hat{A}E = 45^o + 45^o = 90^o$.

Σημείωση

Ισχύει και το αντίστροφο. Έτσι, αν:

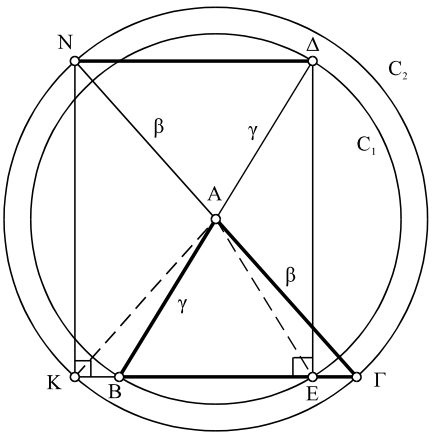
$$B\hat{A}E = 90^o$$

τότε $\hat{A} = 120^o$. Πραγματικά, αν θέσουμε $A\hat{A}Z = A\hat{Z}\Delta = \omega$, τότε:

- $Z\hat{A}E = Z\hat{E}\Delta = \frac{180^o - 90^o - \omega}{2} = 45^o - \frac{\omega}{2}$.
- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta - Z\hat{A}E = \omega - \left(45^o - \frac{\omega}{2}\right) =$
  $= \frac{3\omega}{2} - 45^o$.
- $A\hat{A}B + A\hat{A}Z = 90^o \Leftrightarrow 45^o +$
  $+\left(\frac{3\omega}{2} - 45^o\right) = 90^o \Leftrightarrow \omega = 60^o$.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{A} = 120^o$.

ArJun.19 α) Το ΒΝΔΓ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιες διχοτομούνται. Άρα ΔΝ // ΒΓ. Είναι όμως και:



$$N\hat{K}\Gamma = B\hat{E}\Delta = 90^o ,$$

οπότε ΝΚ // ΔΕ. Άρα το ΔΝΚΕ είναι παραλληλόγραμμο και

Μπάμπης Στεργίου

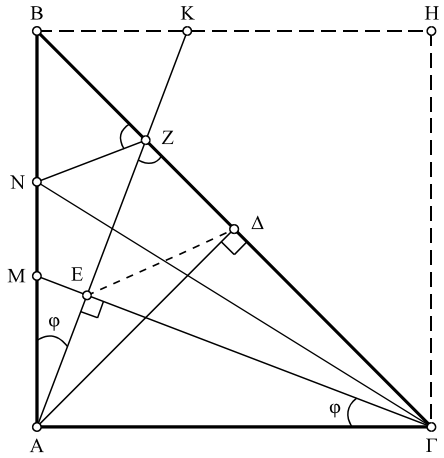
αφού $\hat{K}=90^o$, είναι ορθογώνιο.

β) Έχουμε $\hat{\Gamma}=30^o$ και $\Gamma A=\Gamma B$. Άρα το $\overset{\Delta}{AKN}$ είναι ισοσκελές, οπότε:

$$KN=AK=A\Gamma=\Gamma B.$$

Όμως $\overset{\Delta}{ABK}=\overset{\Delta}{AE\Gamma}$, διότι $AB=AE$, $AK=A\Gamma$, $A\hat{K}B=A\hat{\Gamma}E=30^o$ και $K\hat{B}A=A\hat{E}\Gamma$ (οπότε $K\hat{A}B=E\hat{A}\Gamma$). Επομένως $KE=B\Gamma$. Είναι λοιπόν $KN=KE$, οπότε το ΔΝΚΕ είναι τετράγωνο.

ArJun.20 **α)** Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΗΓ και το σημείο τομής Κ των ΑΖ, ΒΗ.

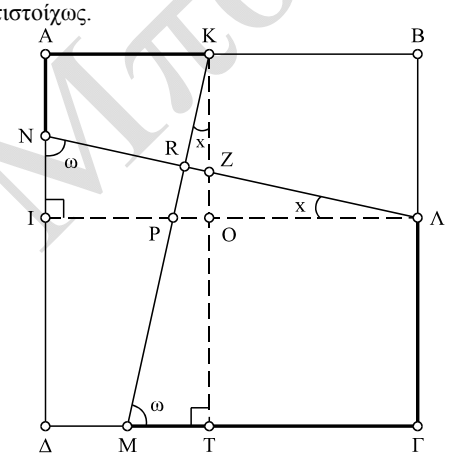


Επειδή $B\hat{A}K=A\hat{\Gamma}M$, είναι $\overset{\Delta}{A\Gamma M}=\overset{\Delta}{ABK}$, οπότε $BK=AM=BN$. Άρα $\overset{\Delta}{BZK}=\overset{\Delta}{BZN}$, οπότε $A\hat{Z}\Gamma=B\hat{Z}K=B\hat{Z}N$.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΔΓ είναι εγγράψιμο διότι $A\hat{E}\Gamma=A\hat{\Delta}\Gamma=90^o$. Άρα:

$$\Delta\hat{E}Z=\Delta\hat{\Gamma}A=45^o.$$

ArJun.21 Φέρνουμε τις ΛΙ, ΚΤ παράλληλες προς τις ΑΒ, ΑΔ αντιστοίχως.



Είναι:

$$AN+AK+M\Gamma+\Gamma\Lambda=2\alpha=$$
$$=\Delta I+NI+AN+AK+KB \text{ ή}$$
$$AN+AK+T\Gamma+MT+\Delta I=$$
$$=\Delta I+NI+AN+AK+KB \text{ ή}$$
$$AN+AK+KB+MT+\Delta I=$$
$$=\Delta I+NI+AN+AK+KB \text{ ή}$$
$$MT=NI \quad (1).$$

Επομένως $\overset{\Delta}{MTK}=\overset{\Delta}{NI\Lambda}$ (αφού $\hat{I}=\hat{T}=90^o$, $I\Lambda=KT=\alpha$, $MT=NI$). Άρα:

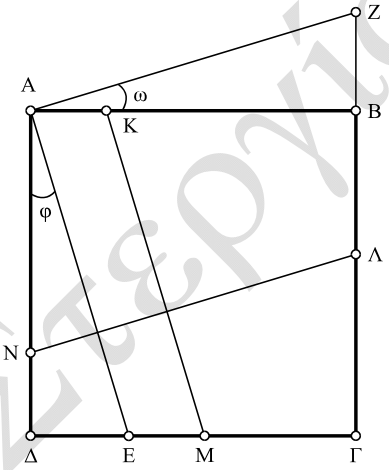
$$\hat{K}=\hat{\Lambda}=x,\ \hat{N}=\hat{M}=\omega$$

Είναι τότε:

$$R\hat{P}\Lambda+R\hat{\Lambda}P=P\hat{M}\Gamma+x=\omega+x=90^o$$

Άλλος τρόπος

Από το Α φέρνουμε ΑΕ // ΚΜ και ΑΖ // ΝΛ.



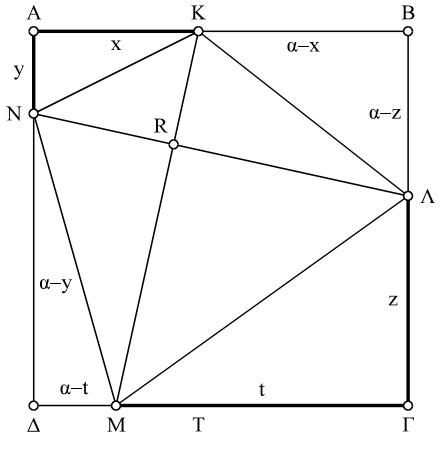
Από τα παραλληλόγραμμα έχουμε ότι:

$$2\alpha=AK+AN+\Gamma\Lambda+\Gamma M=$$
$$=Z\Lambda+EM+\Gamma\Lambda+\Gamma M=$$
$$=B\Gamma+BZ+\Gamma\Delta-\Delta E=2\alpha+BZ-\Delta E$$

Άρα είναι $BZ=\Delta E$, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ είναι ίσα. Επομένως και $\hat{\varphi}=\hat{\omega}$. Άρα $E\hat{A}Z=90^o$. Επομένως $KM\perp N\Lambda$. Επίσης προκύπτει και η ισότητα $KM=N\Lambda$.

Άλλος τρόπος

Μια μετρική απόδειξη.



Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$K\Lambda^2-KN^2=\Lambda M^2-MN^2$$

Πράγματι,

$$K\Lambda^2-KN^2=\Lambda M^2-MN^2\Leftrightarrow$$

Μπάμπης Στεργίου

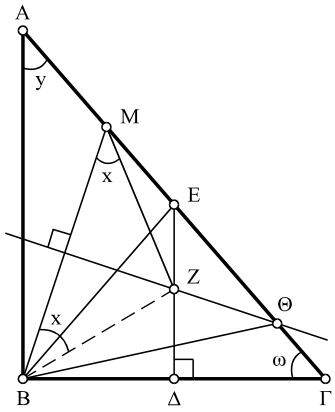
$$\Leftrightarrow (\alpha-x)^2+(\alpha-z)^2-x^2-y^2=$$
$$=z^2+t^2-(\alpha-t)^2-(\alpha-y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha^2=2\alpha(x+z+t+y)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha=2\alpha\cdot 2\alpha\Leftrightarrow 4\alpha^2=4\alpha^2,$$

που ισχύει.

ArJun.22 **α)** Επειδή:

$$ZM=ZB \text{ και } ZB=Z\Gamma,$$

το Z είναι περίκεντρο του τριγώνου ΜΒΓ. Άρα:



$$x=\frac{180^o-B\hat{Z}M}{2}=\frac{180^o-2\omega}{2}=90^o-\omega=\hat{A}.$$

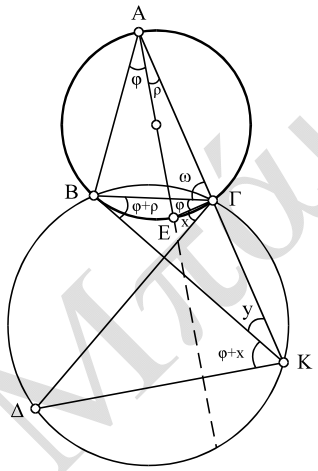
β) Στο τρίγωνο ΕΒΘ η ΕΖ διχοτομεί τη γωνία $\hat{E}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ και η ΘΖ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{\Theta}E$ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΘΜ. Άρα το Z είναι έγκεντρο του τριγώνου ΕΒΘ, οπότε η ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{B}\Theta$.

Σχόλιο

Λύσεις μπορούν να δοθούν επίσης με χρήση εγγράψιμων τετραπλεύρων.

Β. Κύκλος – εγγράψιμα

ArJun.23 Έστω $B\hat{\Gamma}E=\varphi$ και $E\hat{\Gamma}\Delta=x$. Θα αποδείξουμε ότι $\varphi=x$. Αλλά:



$$E\hat{\Gamma}B=E\hat{A}B=\varphi,$$
$$\Gamma\hat{B}K=\Gamma\hat{A}B=\varphi+\rho,$$
$$B\hat{K}\Delta=B\hat{\Gamma}\Delta=\varphi+x.$$

Επειδή $AE\perp K\Delta$, είναι:

$$\rho+\varphi+x+y=90^o=A\hat{\Gamma}E=\varphi+\omega.$$

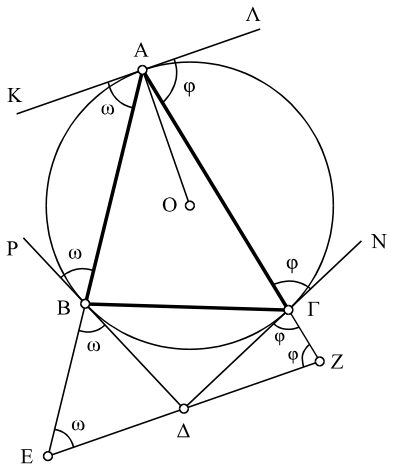
Άρα $\rho+x+y=\omega$. Στο $\overset{\Delta}{B\Gamma K}$ είναι:

$$B\hat{\Gamma}A=\Gamma\hat{B}K+\Gamma\hat{K}B\Leftrightarrow\omega=\varphi+\rho+y.$$

Άρα $\cancel{\rho}+x+\cancel{y}=\varphi+\cancel{\rho}+\cancel{y}\Leftrightarrow x=\varphi$.

ArJun.24 α) Φέρνουμε την εφαπτομένη ΚΑΛ του κύκλου. Επειδή $\Delta Z\,//\,A\Lambda$, είναι $Z\hat{A}\Lambda=A\hat{Z}\Delta=\varphi$. Όμως:

$$\Lambda\hat{A}\Gamma=N\hat{\Gamma}A=\Delta\hat{\Gamma}Z=\varphi,$$



οπότε $\Delta\hat{Z}\Gamma=\Delta\hat{\Gamma}Z=\varphi$. Άρα το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές και έτσι $\Delta\Gamma=\Delta Z$.

Είναι $E\Delta\,//\,AK$, οπότε $K\hat{A}E=A\hat{E}\Delta=\omega$. Όμως $K\hat{A}B=P\hat{B}A=E\hat{B}\Delta=\omega$, οπότε τελικά:

$$\Delta\hat{E}B=\Delta\hat{B}E=\omega.$$

Το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε:

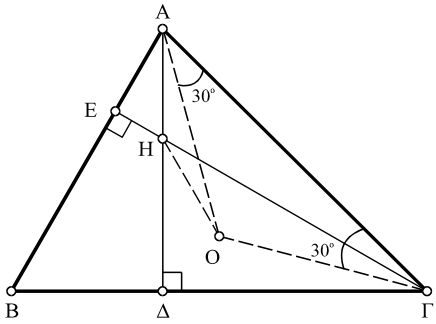
$$\Delta E=\Delta B.$$

Μπάμπης Στεργίου

β) Επειδή λοιπόν $\Delta E = \Delta B$, $\Delta B = \Delta \Gamma$ και $\Delta \Gamma = \Delta Z$, θα είναι $\Delta E = \Delta Z$.

ArJun.25 Έστω ΓΕ το ύψος από το Γ. Το τετράπλευρο ΗΕΒΔ είναι εγγράψιμο, οπότε $A\hat{H}\Gamma = 120^o$. Είναι επίσης:

$$A\hat{O}\Gamma = 2\hat{B} = 120^o = A\hat{H}\Gamma .$$



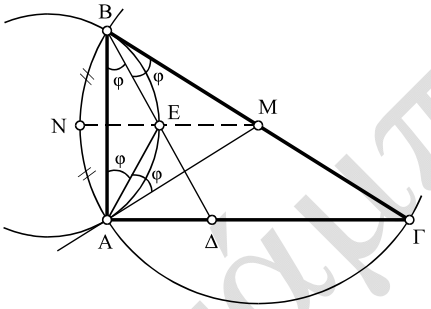
Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΗΟΓ είναι εγγράψιμο. Άρα:

$$O\hat{H}\Gamma = O\hat{A}\Gamma = 30^o .$$

Επειδή $\Delta\hat{H}\Gamma = 60^o$ και $O\hat{H}\Gamma = 30^o$, η ΗΟ διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\hat{H}\Delta$.

ArJun.26 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΕ είναι διάμεσος. Άρα $AE = \frac{B\Delta}{2} = EB$. Είναι επίσης $A\hat{B}E = E\hat{A}M = \varphi$, οπότε:

$$A\hat{B}M = B\hat{A}M = 2\varphi .$$

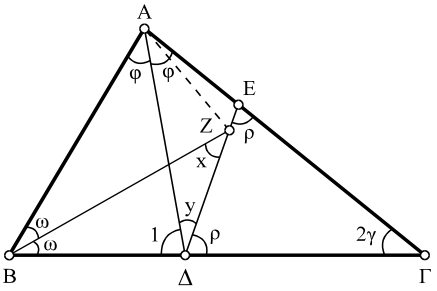


Το τρίγωνο ΜΑΒ είναι και αυτό ισοσκελές, οπότε $MA = MB$. Άρα το Μ είναι μέσο της ΒΓ ($M\hat{A}\Gamma = 90^o - 2\varphi$, $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} = 90^o - -2\varphi$). Άρα το Μ είναι το περίκεντρο του τριγώνου. Αν η ΜΕ τέμνει τον κύκλο (Α,Β,Γ) στο σημείο Ν, τότε το Ν είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, διότι η ΜΕ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. Αφού $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$, η ΓΝ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

Σχόλιο

Αφού ΜΕ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, προκύπτει ότι η ΜΕ και η διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στον κύκλο (Α,Β,Γ), σύμφωνα με το θεώρημα του Νοτίου Πόλου.

ArJun.27 Με βάση το σχήμα και αφού $\Gamma\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{E}\Delta = \rho$, είναι:



- $2\gamma + \rho + \rho = 180^o \Leftrightarrow \rho + \gamma = 90^o$ (1).
- $\overset{\Delta}{\Delta EA}$: $\hat{E}_\rho = y + \varphi \Leftrightarrow \rho = y + \varphi$ (2).
- $\overset{\Delta}{AB\Delta}$: $y + \rho = 2\omega + \varphi$ (3).
- $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $2\varphi + 2\omega + 2\gamma = 180^o \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \varphi + \omega + \gamma = 90^o$ (4).
- Οι (1), (4) δίνουν:
  $\rho + \gamma = \varphi + \omega + \gamma \Leftrightarrow \rho = \varphi + \omega$ (5).
- Η (3) δίνει:

$$y + \rho = 2\omega + \varphi \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow y + (\varphi + \omega) = 2\omega + \varphi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \omega \Leftrightarrow A\hat{\Delta}Z = A\hat{B}Z .$$

Άρα το ΑΒΔΖ είναι εγγράψιμο και αφού $\overset{\frown}{Z\Delta} = \overset{\frown}{ZA}$, παίρνουμε $Z\Delta = ZA$.

Σχόλιο

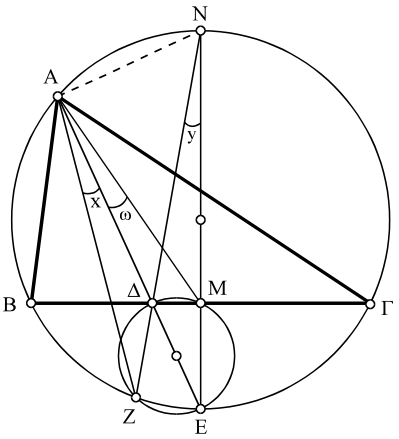
Από την (5) είναι $\rho = \varphi + \omega$. Όμως στο $\overset{\Delta}{\Delta BZ}$ είναι $\rho = \omega + x$. Άρα:

$$\varphi + \omega = \omega + x \Leftrightarrow \varphi = x \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = B\hat{Z}\Delta .$$

Το ΑΒΔΖ είναι λοιπόν εγγράψιμο, οπότε:

$$ZA = Z\Delta .$$

ArJun.28 Έστω ότι η ευθεία ΕΜ τέμνει τον κύκλο στο Ν. Η ΕΝ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε $N\hat{Z}E = 90^o$.



Είναι όμως και $\Delta\hat{Z}E = 90^o$, διότι η ΔΕ είναι διάμετρος. Άρα τα σημεία Ν, Δ, Ζ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

- Είναι $Z\hat{A}E = Z\hat{N}E$, δηλαδή $x = y$, διότι είναι εγγράψιμες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

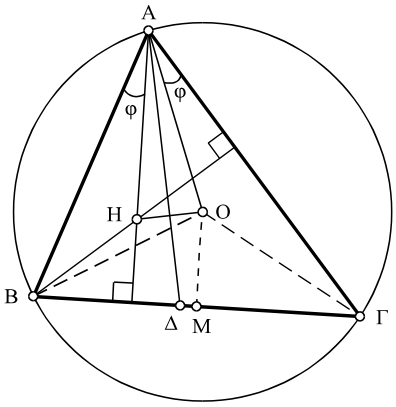
Μπάμπης Στεργίου

- Επειδή $E\hat{A}N = 90^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε διάμετρο, είναι
$$\Delta\hat{A}N = \Delta\hat{M}N = 90^o .$$
Άρα το ΑΔΜΝ είναι εγγράψιμο, οπότε:
$$\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{N}M \Leftrightarrow \omega = y .$$
- Είναι λοιπόν $x = y$ και $y = \omega$, οπότε $x = \omega$. Αλλά η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, οπότε $\Delta\hat{A}B = M\hat{A}\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.

Σχόλιο

Επειδή $Z\hat{A}B = M\hat{A}\Gamma$, η ΑΖ είναι συμμετροδιάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Η άσκηση δείχνει και έναν άλλο τρόπο κατασκευής της συμμετροδιαμέσου.

ArJun.29 Έστω $OM \perp B\Gamma$. Επειδή:



$$H\hat{A}B = O\hat{A}\Gamma \ \ (= 90^o - \hat{B})$$

και η ΑΔ είναι κάθετη στην ΗΟ, το $\overset{\Delta}{AHO}$ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$AH = AO \Leftrightarrow 2OM = R \Leftrightarrow OM = \frac{O\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow O\hat{\Gamma}B = O\hat{B}\Gamma = 30^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 120^o \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \hat{A} = 60^o .$$

Σημείωση

Αν $ON \perp A\Gamma$ και ΓΕ είναι το ύψος από το Γ, τότε:

- $AH = AO$.
- $H\hat{A}E = A\hat{O}N$.

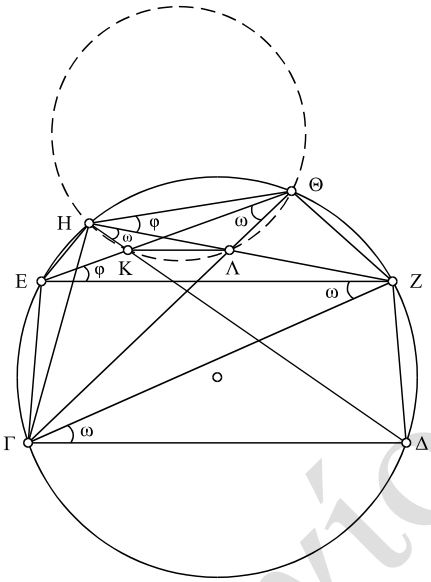
Επομένως $\overset{\Delta}{AHE} = \overset{\Delta}{AON}$, οπότε $AE = \frac{A\Gamma}{2}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΕ συμπεραίνουμε τώρα ότι $A\hat{\Gamma}E = 30^o$, οπότε $\hat{A} = 60^o$.

ArJun.30 Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΘΕΓΖ έχουμε ότι:

$$E\hat{\Theta}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma = \omega \qquad (1)$$

και από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΔΖΗ έχουμε ότι:

$$\Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{H}Z = \omega \qquad (2).$$



Από τις σχέσεις (1), (2) θα ισχύει:

$$Z\hat{H}\Delta = \Gamma\hat{\Theta}E = \omega .$$

Επομένως το τετράπλευρο ΚΛΘΗ είναι εγγράψιμο, οπότε $\Theta\hat{H}\Lambda = \Theta\hat{K}\Lambda = \varphi$.

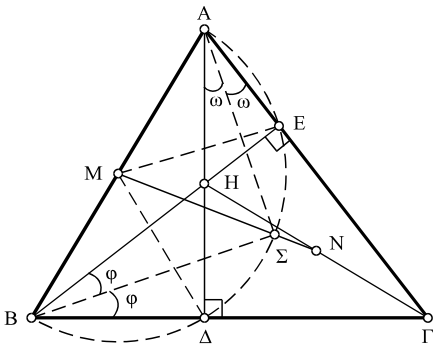
Αλλά από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΗΕΖΘ ισχύει $\Theta\hat{H}Z = \Theta\hat{E}Z = \varphi$, που σημαίνει ότι $\Theta\hat{K}\Lambda = \Theta\hat{E}Z$, συνεπώς:

$$K\Lambda \ // \ EZ \ // \ \Gamma\Delta.$$

Η λύση έγινε από το συνάδελφο και φίλο Μιχάλη Νάννο.

ArJun.31 Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΕΒ παίρνουμε:

$$M\Delta = ME = \frac{AB}{2} \qquad (1).$$



Όμοια, από τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΕΓ και ΗΔΓ παίρνουμε:

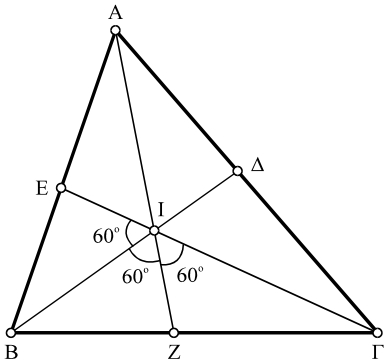
$$N\Delta = NE = \frac{H\Gamma}{2} \qquad (2).$$

Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμο, οπότε οι ΒΣ, ΑΣ διέρχονται από το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\Delta E}$. Άρα το Σ βρίσκεται στον κύκλο (Α,Β,Δ,Ε) και προφανώς $\Sigma\Delta = \Sigma E$. Άρα τα σημεία Μ, Σ, Ν βρίσκονται στη μεσοκάθετη του ΔΕ.

ArJun.32 α) Στο $\overset{\Delta}{IB\Gamma}$ η γωνία $B\hat{I}E$ είναι εξωτερική. Έτσι:

$$B\hat{E}I = I\hat{B}\Gamma + I\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$$

$$= \frac{120^o}{2} = 60^o = \hat{A} .$$



Άρα το ΑΕΙΔ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$I\Delta = IE ,$$

αφού $I\hat{A}E = I\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$.

β) Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΙΖ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Τότε $\overset{\Delta}{BEI} = \overset{\Delta}{BZI}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta I} = \overset{\Delta}{\Gamma Z\Delta}$, διότι:

$$B\hat{I}E = B\hat{I}Z = Z\hat{I}\Gamma = \Gamma\hat{I}\Delta = 60^o .$$

Επομένως:

- $BE = BZ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma Z$.
- $BE + \Gamma\Delta = BZ + \Gamma Z = B\Gamma$.

Σχόλιο

Ο νόμος των συνημιτόνων δίνει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma .$$

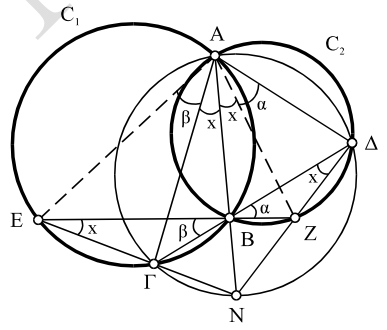
Επειδή $BE = \frac{\gamma\cdot\alpha}{\alpha+\beta}$, $\Gamma\Delta = \frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha+\gamma}$, έχουμε:

$$BE + \Gamma\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma} =$$

$$= \alpha\frac{\alpha\gamma + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} =$$

$$= \alpha\frac{\alpha\gamma + \beta\gamma + (\alpha^2+\beta\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} = \alpha .$$

ArJun.33 Φέρουμε τις ΑΕ, ΑΖ. Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}Z = \alpha$ και $\Gamma\hat{B}E = \beta$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha = \beta$. Είναι όμως:

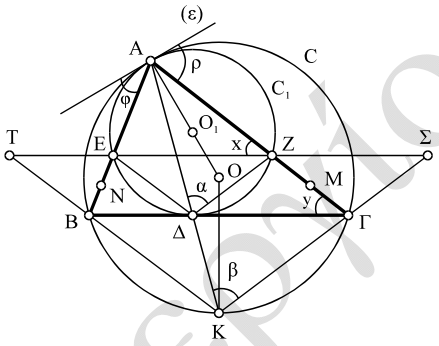


- $\Gamma\hat{E}B = \Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{A}N = \Gamma\hat{\Delta}N = B\hat{\Delta}Z =$
$= B\hat{A}Z = x$,
- $B\hat{A}E = B\hat{\Gamma}N = \Delta\hat{\Gamma}N = \Delta\hat{A}N$,

οπότε $x + \beta = \alpha + x$. Άρα $\alpha = \beta$ και έχουμε τελειώσει.

β) Αφού τα Ε, Β, Ζ είναι συνευθειακά, παίρνουμε $\Gamma\hat{E}B = B\hat{A}Z = x \Leftrightarrow N\hat{E}Z = N\hat{A}Z$. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΝΖ είναι εγγράψιμο.

ArJun.34 Επειδή το κέντρο του C_1 βρίσκεται στην ΟΑ, οι κύκλοι C_1, C εφάπτονται στο Α. Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη στο Α. Είναι τότε:



- $x = \varphi$ (από τον C_1) και $y = \varphi$ (από τον C_2), οπότε $x = y$. Επομένως ΕΖ // ΒΓ.
- $\alpha = \rho$ (από την C_1) και $\beta = \rho$ (από τον C_2), οπότε ΔΖ // ΚΓ.
- Το τετράπλευρο ΔΖΣΓ είναι παραλληλόγραμμο και έτσι η ΔΣ διχοτομεί το τμήμα ΓΖ, δηλαδή η ΔΣ διέρχεται από το Μ.

Σχόλια

α) Επειδή $\Delta E = \Delta Z$ και $B\Delta\Gamma$ // ΕΖ, η ΒΓ εφάπτεται με τον C_1 στο Δ.

β) Αν η ΚΒ τέμνει την ΖΕ στο Τ, τότε η ΔΤ διχοτομεί την ΒΕ, δηλαδή οι ΚΒ, ΕΖ και ΔΝ συντρέχουν, όπου Ν είναι το μέσο του ΒΕ.

γ) Η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της ΤΣ, αφού τα τρίγωνα ΚΒΓ, ΚΤΣ είναι ισοσκελή (ΒΓ // ΤΣ) και $OK \perp \Sigma T$.

δ) Το σχήμα είναι βασικό και παραπέμπει σε βασικό λήμμα: Αν οι κύκλοι εφάπτονται στο Α και η ΒΓ εφάπτεται στον μικρό κύκλο, τότε η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$. Πρόκειται δηλαδή για "αντίστροφο" γνωστού θέματος.

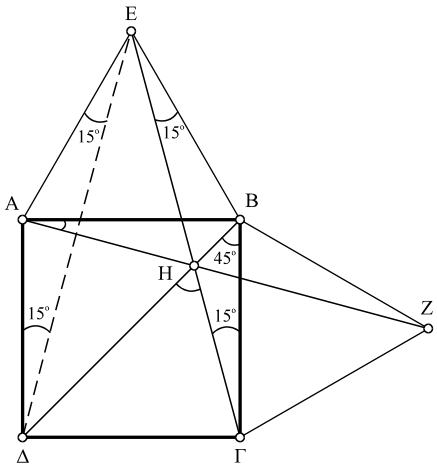
ArJun.35 Είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = 45^o$ και:

$$B\hat{\Gamma}E = B\hat{E}\Gamma = 15^o .$$

Από το τρίγωνο ΒΗΓ παίρνουμε:

$$\Gamma\hat{H}\Delta = 15^o + 45^o = 60^o = B\hat{Z}\Gamma .$$

Μπάμπης Στεργίου



Επομένως ΒΖΓΗ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$B\hat{H}Z = B\hat{\Gamma}Z = 60^o$ και $\Gamma\hat{H}Z = \Gamma\hat{B}Z = 60^o$.

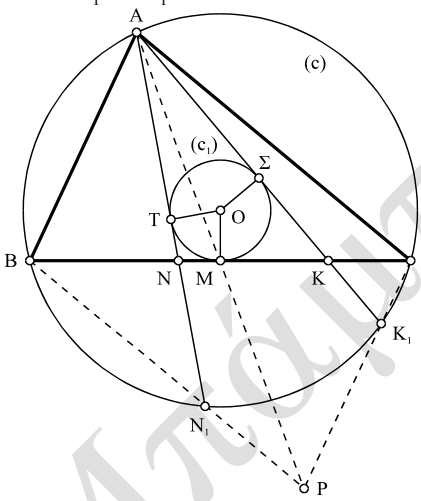
Επειδή είναι και $E\hat{H}B = \Delta\hat{H}\Gamma = 60^o$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{H}E = 60^o$.

Είναι $B\hat{H}Z = 60^o = A\hat{E}B$, οπότε το ΑΕΒΗ είναι εγγράψιμο. Άρα:

$$A\hat{H}E = A\hat{B}E = 60^o$$

και αφού $E\hat{H}B = B\hat{H}Z = 60^o$, τα σημεία Α, Η, Ζ είναι συνευθειακά.

ArJun.36 Επειδή $OM = OT = O\Sigma$, θα είναι $B\Gamma = AN_1 = AK_1$.

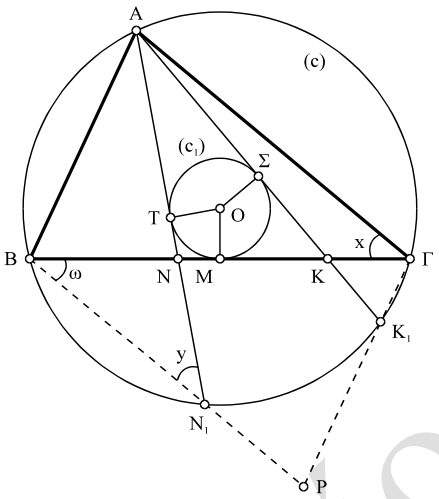


Αφού οι ΒΓ, ΑΜ είναι ίσες, το $ABN_1\Gamma$ είναι τραπέζιο, οπότε $BN_1 // A\Gamma$.

Όμοια, είναι $B\Gamma = AK_1$, οπότε $\Gamma K_1 // AB$. Αρα το ΑΒΡΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΑΡ διέρχεται από το μέσο Μ της ΒΓ.

Σχόλιο

Έστω ότι οι ευθείες BN_1, ΓK_1 τέμνονται στο Ρ. Θα αποδείξουμε ότι το ΑΒΡΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αρκεί π.χ. $BN_1 // A\Gamma$.

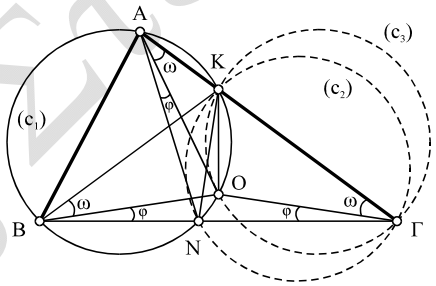


Όμως $OM = OT$, οπότε $B\Gamma = AN_1$. Άρα:

$$BM = TN_1.$$

Αλλά $NT = NM$, οπότε $NB = NN_1$, δηλαδή $\omega = y = x$. Αφού $\omega = x$, θα είναι $BN_1 // A\Gamma$. Όμοια, είναι $\Gamma K_1 // AB$, οπότε το ΑΒΡΓ είναι παραλληλόγραμμο.

ArJun.37 Έχουμε:

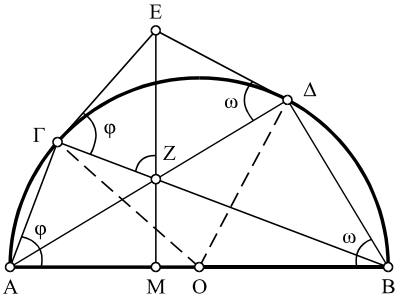


- Οι γωνίες $O\hat{B}\Gamma$ και $O\hat{\Gamma}B$ είναι ίσες με φ. Επίσης οι γωνίες $O\hat{B}K$, $O\hat{A}K$ και $O\hat{\Gamma}A$ είναι ίσες με ω, οπότε οι γωνίες $K\hat{B}\Gamma$ και $K\hat{\Gamma}B$ είναι ίσες με $\varphi + \omega$. Άρα το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές και έτσι $KB = K\Gamma$.
- Είναι $KB = K\Gamma$ και οι γωνίες $B\hat{A}K$ και $K\hat{N}\Gamma$ είναι ίσες, οπότε οι κύκλοι (Α,Κ,Β) και (Γ,Κ,Ν) είναι ίσοι. Αυτό ήταν το πιο αξιόλογο μέρος της άσκησης.
- Είναι $OA = O\Gamma$ και οι γωνίες $O\hat{B}A$ και $O\hat{K}\Gamma$ είναι ίσες, οπότε οι κύκλοι (Α,Β,Ο) και (Κ,Ο,Γ) είναι ίσοι.

Άρα οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι.

ArJun.38 Είναι $\Gamma\hat{A}B = E\hat{\Gamma}B = \varphi$ και:

$$\Delta\hat{B}A = E\hat{\Delta}A = \omega.$$



Μπάμπης Στεργίου

Επομένως:

$$\Gamma\hat{Z}\Delta = A\hat{\Gamma}Z + \Gamma\hat{A}Z = 90^o + \Gamma\hat{A}\Delta =$$
$$= 90^o + \frac{1}{2}\Gamma\hat{O}\Delta = 90^o + \frac{1}{2}(180^o - \Gamma\hat{E}\Delta) =$$
$$= 180^o - \frac{1}{2}\Gamma\hat{E}\Delta .$$

Επειδή επιπλέον είναι $E\Gamma = E\Delta$, το Ε είναι περίκεντρο του τριγώνου ΖΓΔ, οπότε:

$$E\Gamma = EZ = E\Delta .$$

Είναι επομένως $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Gamma}Z = \Gamma\hat{A}M$, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΖΜ είναι εγγράψιμο. Άρα $Z\hat{M}A = 90^o$, δηλαδή $EZ \perp AB$. Επειδή:

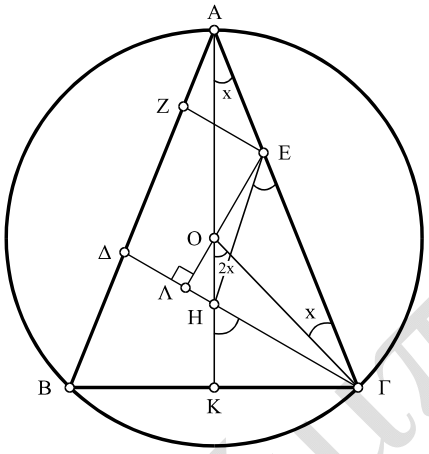
$$O\hat{\Gamma}E = O\hat{M}E = O\hat{\Delta}E = 90^o ,$$

τα σημεία Ε, Γ, Μ, Ο, Δ είναι ομοκυκλικά.

ArJun.39 Έστω ότι η ΑΟ τέμνει την ΓΔ στο Η. Θα αποδείξουμε ότι ΕΗ // ΑΒ.

Επειδή $AO \perp B\Gamma$, είναι:

$$K\hat{H}\Gamma = 90^o - K\hat{\Gamma}H = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$$
$$= \Lambda\hat{E}\Gamma = O\hat{E}\Gamma .$$



Άρα το τετράπλευρο ΕΟΗΓ είναι εγγράψιμο. Επειδή $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = x$, είναι $H\hat{O}\Gamma = 2x$, οπότε:

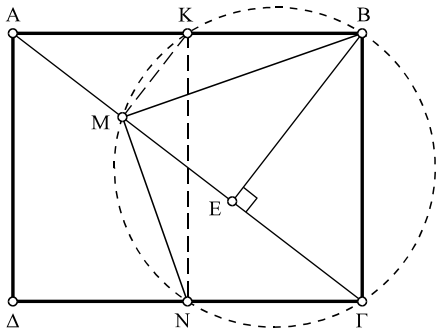
$$H\hat{E}\Gamma = H\hat{O}\Gamma = 2x = \hat{A} .$$

Άρα ΕΗ // ΑΒ και έτσι το ΕΖΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $\Delta Z = EH = EA$, αφού:

$$E\hat{H}O = E\hat{\Gamma}O = x = O\hat{A}E$$

και έτσι το τρίγωνο ΕΑΗ είναι ισοσκελές.

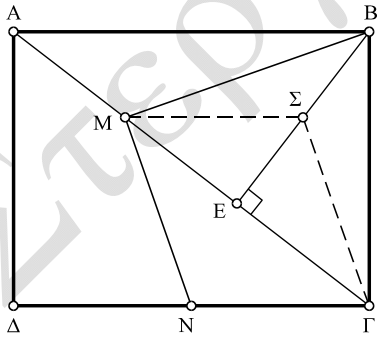
ArJun.40 Έστω Κ το μέσο του ΑΒ. Το ΚΒΓΝ είναι ορθογώνιο, οπότε τα σημεία Κ, Β, Γ, Ν είναι ομοκυκλικά και μάλιστα σε κύκλο με διάμετρο ΒΝ. Επειδή ΚΜ // ΒΕ και



$B\Sigma \perp A\Gamma$, είναι $K\Lambda \perp A\Gamma$. Άρα το ΒΚΜΓ είναι εγγράψιμο, αφού οι απέναντι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{M}$ είναι ορθές. Επειδή και τα Κ, Β, Γ, Ν είναι ομοκυκλικά, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Κ, Β, Γ, Ν, Μ είναι ομοκυκλικά. Άρα:

$$B\hat{M}N = B\hat{K}N = 90^o .$$

Άλλος τρόπος



Αν Σ είναι μέσο του ΒΕ, τότε:

$$M\Sigma = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$$

και $M\Sigma // AB$. Άρα $M\Sigma // = \Gamma N$, οπότε το ΜΣΓΝ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή είναι $M\Sigma \perp B\Gamma$, διότι $AB \perp B\Gamma$ και $BE \perp M\Gamma$, το Σ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΜ. Άρα $\Gamma\Sigma \perp BM$ και αφού $NM // \Gamma\Sigma$, θα είναι $NM \perp BM$, δηλαδή $B\hat{M}N = 90^o$.

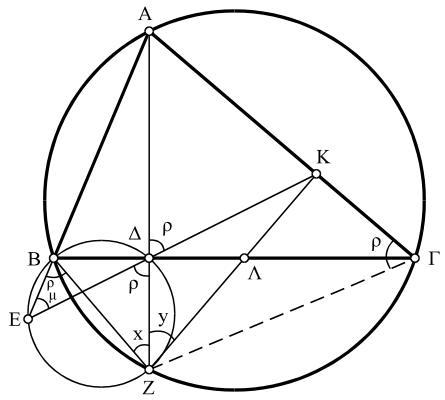
ArJun.41 Φέρουμε τη ΒΖ. Αρκεί να είναι:

$$\Delta\hat{Z}B = \Delta\hat{Z}\Lambda ,$$

διότι τότε στο τρίγωνο ΖΒΛ η ΖΔ θα είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Όμως $x = \omega$, διότι βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Αρκεί λοιπόν να είναι $y = \omega$. Αυτό σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΔΚΓΖ πρέπει να είναι εγγράψιμο. Φέρουμε και την ΖΓ. Είναι:

$$A\hat{\Delta}K = E\hat{\Delta}Z = E\hat{B}Z = A\hat{\Gamma}Z = K\hat{\Gamma}Z = \rho .$$

Μπάμπης Στεργίου



Επειδή $A\hat{\Delta}K = K\hat{\Gamma}Z = \rho$, το ΔΖΓΚ είναι εγγράψιμο. Άρα $y = \omega$, δηλαδή $\Delta\hat{Z}K = \Delta\hat{\Gamma}K$. Επομένως και $x = y$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Άλλος τρόπος

Είναι $\mu = x = \omega$, οπότε το ΒΕΓΚ είναι εγγράψιμο. Άρα:

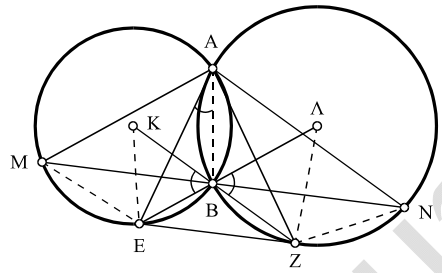
$$A\Delta \cdot AZ = AB \cdot AE = AK \cdot A\Gamma .$$

Αφού $A\Delta \cdot AZ = AK \cdot A\Gamma$, το ΔΖΓΚ είναι εγγράψιμο. Επομένως:

$$\Delta\hat{Z}K = \Delta\hat{\Gamma}K = B\hat{Z}A ,$$

οπότε το τρίγωνο ΖΒΛ είναι ισοσκελές. Άρα η ΖΔ είναι και διάμεσος, ως διχοτόμος, οπότε $\Delta B = \Delta\Lambda$.

ArJun.42 Φέρουμε τις ΑΒ, ΚΕ, ΛΖ. Είναι:



$$E\hat{A}B = \frac{1}{2}E\hat{K}B = \frac{1}{2}(180^o - 2K\hat{B}E) =$$

$$= 90^o - K\hat{B}E = 90^o - \Lambda\hat{B}Z = \frac{1}{2}B\hat{\Lambda}Z = B\hat{\Delta}Z ,$$

οπότε η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{\Delta}Z$. Θα αποδείξουμε ότι το Β είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΕΖ. Είναι:

- $A\hat{B}E + A\hat{B}Z = A\hat{B}E + (180^o - A\hat{B}K) =$
  $= 180^o + K\hat{B}E = 180^o + \left(90^o - \frac{\hat{K}}{2}\right) =$
  $= 180^o + 90^o - E\hat{A}B = 270^o - E\hat{A}B .$
- $A\hat{B}E + A\hat{B}Z = (180^o - A\hat{B}\Lambda) + A\hat{B}Z =$
  $= 270^o - Z\hat{A}B .$

Άρα παίρνουμε:

$$A\hat{B}E + A\hat{B}Z = \frac{1}{2}\left[540^o - (E\hat{A}B + Z\hat{A}B)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(540^o - E\hat{A}Z) .$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$E\hat{B}Z = 360^o - (A\hat{B}E + A\hat{B}Z) =$$

$$= 360^o - \frac{1}{2}(540^o - E\hat{A}Z) = 90^o + \frac{1}{2}E\hat{A}Z .$$

Αφού λοιπόν η ΑΒ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{A}Z$ και $E\hat{B}Z = 90^o + \frac{E\hat{A}Z}{2}$, το Β είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΕΖ. Είναι επομένως:

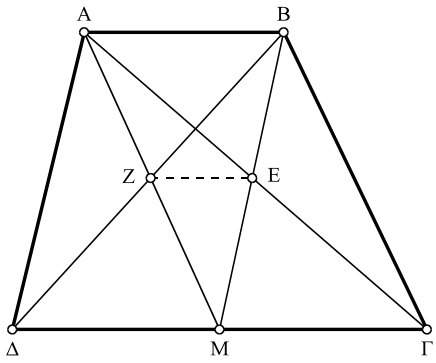
$$M\hat{B}E = B\hat{E}Z = B\hat{E}A ,$$

οπότε το ΕΒΑΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα $AE = BM$. Όμοια είναι $AZ = BN$, οπότε $MN = MB + BN = AE + AZ$.

Μπάμπης Στεργίου

Γ. Θεώρημα Θαλή – Ομοιότητα

ArJun.43 Αφού $\overset{\Delta}{ABE} \approx \overset{\Delta}{EM\Gamma}$, είναι:



$$\frac{AB}{M\Gamma} = \frac{BE}{EM} \qquad (1).$$

Αφού $\overset{\Delta}{ABZ} \approx \overset{\Delta}{Z\Delta M}$, είναι:

$$\frac{AB}{M\Delta} = \frac{BZ}{Z\Delta} \qquad (2).$$

Αλλά $M\Gamma = M\Delta$, οπότε $\frac{BE}{EM} = \frac{BZ}{Z\Delta}$. Άρα $ZE \,//\, M\Delta$, δηλαδή $ZE \,//\, \Gamma\Delta$.

Παρατήρηση

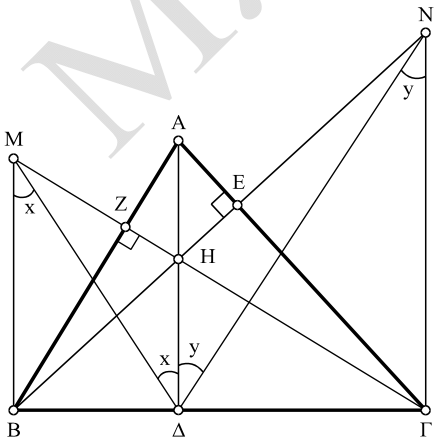
Ισχύει και το αντίστροφο. Αν δηλαδή $EZ \,//\, \Gamma\Delta$, τότε το Μ είναι μέσο του ΓΔ. Πράγματι:

- $\frac{AB}{M\Gamma} = \frac{BE}{EM}$ και $\frac{AB}{M\Delta} = \frac{BZ}{Z\Delta}$.
- $ZE \,//\, M\Delta$, οπότε $\frac{BE}{EM} = \frac{BZ}{Z\Delta}$.

Άρα $\frac{AB}{M\Gamma} = \frac{AB}{M\Delta} \Leftrightarrow M\Gamma = M\Delta$.

ArJun.44 Επειδή $A\Delta \,//\, MB \,//\, N\Gamma$, είναι:

- $A\hat{\Delta}M = B\hat{M}\Delta = x$,
- $A\hat{\Delta}N = \Delta\hat{N}E = y$.



Θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ, ΝΓΔ είναι όμοια. Όμως:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{MH}{H\Gamma} = \frac{MB}{N\Gamma},$$

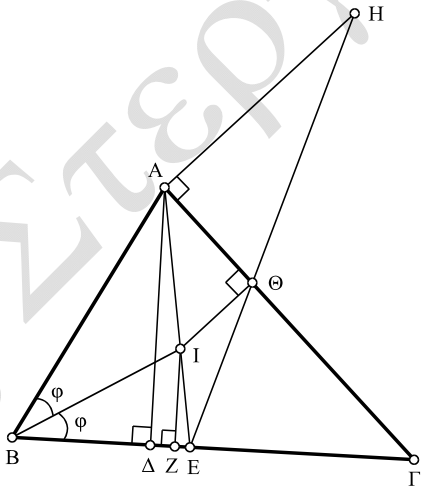
διότι $MB \,//\, A\Delta \,//\, N\Gamma$ και $\overset{\Delta}{HBM} \approx \overset{\Delta}{H\Gamma N}$. Έτσι:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{MB}{N\Gamma}$$

και επειδή $M\hat{B}\Delta = N\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$, τα τρίγωνα ΜΒΔ, ΝΓΔ είναι όμοια. Άρα $x = y$, οπότε $A\hat{\Delta}M = A\hat{\Delta}N$.

ArJun.45 Επειδή $AH,\ I\Theta \perp A\Gamma$, είναι $AH \,//\, I\Theta$. Άρα:

$$\frac{I\Theta}{AH} = \frac{EI}{EA} \qquad (1).$$



Φέρουμε την $IZ \perp B\Gamma$. Είναι $IZ \,//\, A\Delta$, οπότε:

$$\frac{IZ}{A\Delta} = \frac{EI}{EA} \qquad (2).$$

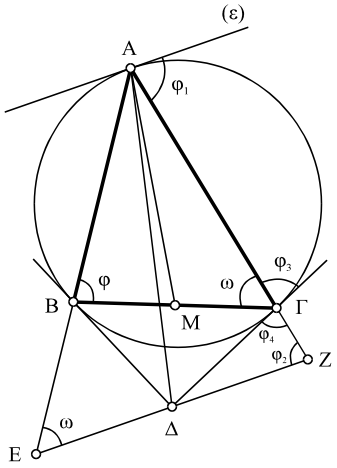
Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{I\Theta}{AH} = \frac{IZ}{A\Delta} \Leftrightarrow AH = A\Delta,$$

διότι $I\Theta = IZ$, αφού το Ι είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ArJun.46 Φέρουμε την εφαπτομένη (ε) στο Α και την παράλληλη από το Δ προς την ε, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε και Ζ.

Μπάμπης Στεργίου



- Είναι $\varphi = \varphi_1$ και $\varphi = \varphi_3$. Όμως $\varphi_1 = \varphi_2$ ως εντός εναλλάξ και $\varphi_3 = \varphi_4$. Επομένως $\varphi_2 = \varphi_4$, οπότε το $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma Z}$ είναι ισοσκελές. Άρα $\Delta\Gamma = \Delta Z$. Όμοια και $\Delta B = \Delta E$ και επειδή $\Delta B = \Delta\Gamma$, είναι $\Delta E = \Delta Z$.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ είναι όμοια, αφού $\hat{B} = \hat{Z}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{E}$. Έτσι:

$$\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{EZ}{BZ} = \frac{2E\Delta}{2\Gamma M} = \frac{E\Delta}{\Gamma M}$$

Αυτή δίνει $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{\Gamma M}$ και επειδή $\hat{E} = \hat{\Gamma} = \omega$, είναι $\overset{\Delta}{AE\Delta} = \overset{\Delta}{A\Gamma M}$. Άρα:

$$\Delta\hat{A}E = \Gamma\hat{A}M,$$

δηλαδή $\Delta\hat{A}B = M\hat{A}\Gamma$.

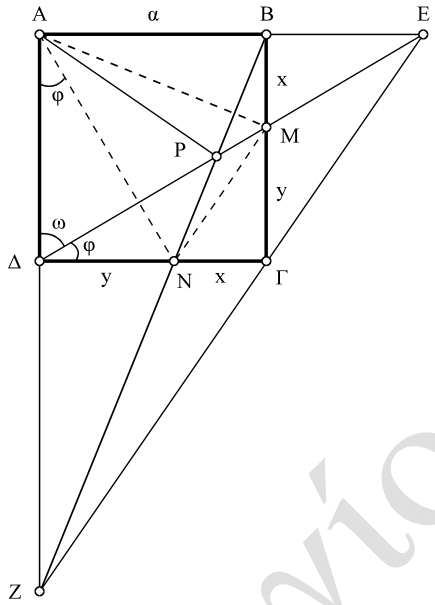
ArJun.47 α) Θέτουμε για ευκολία $AB = \alpha$ και $BM = x$.

- Επειδή $\overset{\Delta}{EBM} \approx \overset{\Delta}{EA\Delta}$, παίρνουμε:

$$\frac{EB}{EA} = \frac{BM}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{EB}{EB+\alpha} = \frac{x}{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \cdot EB = x \cdot EB + \alpha x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow EB = \frac{\alpha x}{\alpha - x} \quad (1).$$

- Επειδή $\overset{\Delta}{Z\Delta N} \approx \overset{\Delta}{ZAE}$, παίρνουμε:

$$\frac{Z\Delta}{ZA} = \frac{\Delta N}{AB} \Leftrightarrow \frac{Z\Delta}{Z\Delta+\alpha} = \frac{\alpha - x}{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \cdot Z\Delta = (\alpha - x)Z\Delta + \alpha(\alpha - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \cdot Z\Delta = \alpha(\alpha - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Z\Delta = \frac{\alpha(\alpha - x)}{x} \quad (2).$$



Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

$$EB \cdot Z\Delta = \frac{\alpha x}{\alpha - x} \cdot \frac{\alpha(\alpha - x)}{x} = \alpha^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma.$$

Άρα $\frac{EB}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta}$, οπότε $\overset{\Delta}{EB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$. Είναι επομένως $B\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{Z}\Gamma$, οπότε:

$$B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}Z = 90^o.$$

Άρα η γωνία $Z\hat{\Gamma}E$ είναι ευθεία.

β) Επειδή $\overset{\Delta}{A\Delta N} = \overset{\Delta}{\Delta\Gamma M}$, παίρνουμε ότι:

- $\Delta\hat{A}N = \Gamma\hat{\Delta}M$.
- $\Delta\hat{A}N + M\hat{\Delta}A = \Gamma\hat{\Delta}M + M\hat{\Delta}A = 90^o$.

Άρα $M\Delta \perp AN$. Όμοια είναι $NB \perp AM$. Επομένως στο $\overset{\Delta}{AMN}$ το Ρ είναι ορθόκεντρο, οπότε $AP \perp MN$.

γ) Θα αποδείξουμε ότι $ZE \,//\, MN$ και μάλιστα ότι $MN \,//\, \Gamma Z$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\frac{NB}{NZ} = \frac{MB}{M\Gamma}$.

Είναι όμως:

- $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{x}{\alpha - x}$.
- $\frac{NB}{NZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha(\alpha - x)}{x}} = \frac{x}{\alpha - x}$.

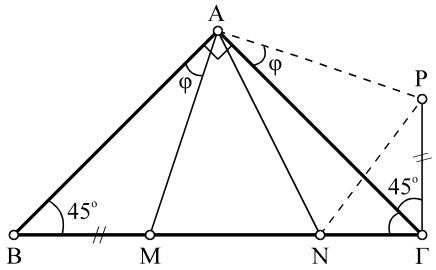
Άρα $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{NB}{NZ}$, οπότε $MN \,//\, EZ$ και αφού $AP \perp MN$, θα είναι $AP \perp ZE$.

ArJun.48 Θεωρούμε τμήμα $P\Gamma \perp B\Gamma$ με $P\Gamma = BM$. Είναι τότε:

$$PN^2 = P\Gamma^2 + \Gamma N^2 = BM^2 + \Gamma N^2 = MN^2.$$

Επομένως $NP = NM$ (1).

Μπάμπης Στεργίου



Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΡΓ είναι ίσα, διότι $AB = A\Gamma$, $BM = \Gamma P$ και:

$$A\hat{B}M = A\hat{\Gamma}P = 45^o .$$

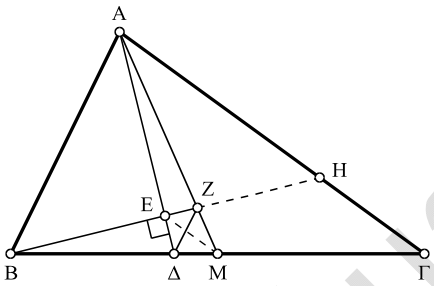
Άρα $AM = AP$ και $M\hat{A}B = \Gamma\hat{A}P = \varphi$. Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΝΜ και ΑΝΡ είναι ίσα, διότι έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα:

$$N\hat{A}M = N\hat{A}P .$$

Όμως $B\hat{A}\Gamma = 90^o$, οπότε $M\hat{A}P = 90^o$, αφού $M\hat{A}B = \Gamma\hat{A}P = \varphi$. Άρα:

$$M\hat{A}N = \frac{M\hat{A}P}{2} = \frac{90^o}{2} = 45^o .$$

ArJun.49 Αν η ΒΖ τέμνει την ΑΓ στο Η, τότε το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές και το Ε είναι μέσο του ΒΗ. Φέρουμε την ΕΜ. Για να είναι $\Delta Z \,//\, AB$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{EB}{EZ} = \frac{EA}{E\Delta}$. Είναι όμως $\overset{\Delta}{ZAH} \approx \overset{\Delta}{ZEM}$, οπότε:



$$\frac{BE}{EZ} = \frac{EH}{EZ} = \frac{EZ+ZH}{EZ} = 1 + \frac{ZH}{ZE} = 1 + \frac{AH}{EM} =$$

$$= 1 + \frac{A\Gamma - H\Gamma}{EM} = 1 + \frac{A\Gamma}{EM} - 2 = \frac{A\Gamma}{EM} - 1 =$$

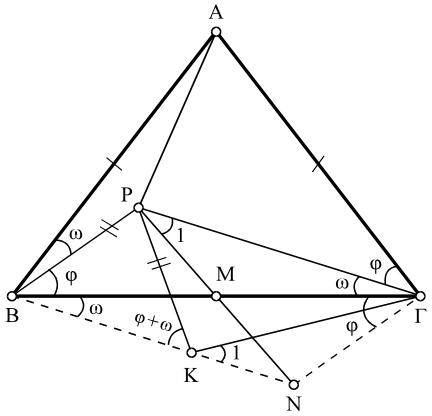
$$= \frac{\Delta A}{\Delta E} - 1 = \frac{\Delta A - \Delta E}{\Delta E} = \frac{AE}{\Delta E} .$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

$$\frac{EB}{EZ} = \frac{EA}{E\Delta} ,$$

οπότε $\Delta Z \,//\, AB$.

ArJun.50 Έστω Ν το συμμετρικό του Ρ ως προς το Μ. Το ΒΡΓΝ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $P\hat{B}N = P\hat{\Gamma}N$ (1).



Επειδή $P\hat{B}\Gamma = P\hat{\Gamma}A = \varphi$, είναι:

$$A\hat{B}P = P\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{B}N = \omega \qquad (2).$$

Είναι $P\hat{B}N = \varphi + \omega = A\hat{B}\Gamma$. Στη ΒΝ παίρνουμε σημείο Κ, ώστε $PB = PK$. Τότε:

$$P\hat{K}B = \varphi + \omega = P\hat{\Gamma}N \qquad (3),$$

οπότε το ΡΚΝΓ είναι εγγράψιμο. Άρα:

$$\hat{P}_1 = \hat{K}_1 = 180^o - B\hat{K}\Gamma \qquad (4).$$

Επειδή $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{PBK}$, είναι:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{PB}{BK} \qquad (5).$$

Όμως $A\hat{B}P = \Gamma\hat{B}K = \omega$, οπότε η (5) εξασφαλίζει ότι τα τρίγωνα PAB και ΚΒΓ είναι όμοια. Άρα:

$$A\hat{P}B = B\hat{K}\Gamma \qquad (6).$$

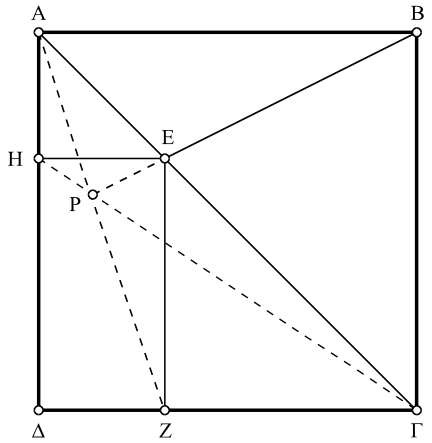
Η σχέση λοιπόν (4) γράφεται:

$$\hat{P}_1 = 180^o - B\hat{K}\Gamma \overset{(6)}{=\!=} 180^o - A\hat{P}B ,$$

δηλαδή $\hat{P}_1 + A\hat{P}B = 180^o$. Έτσι:

$$B\hat{P}M + A\hat{P}\Gamma = 180^o .$$

ArJun.51 α) Είναι:



$$BZ^2 - BH^2 = (B\Gamma^2 + \Gamma Z^2) - (BA^2 + AH^2) =$$

$$= \Gamma Z^2 - AH^2 = EZ^2 - EH^2 .$$

β) Είναι $ZA \perp BH$ και $\Gamma H \perp BZ$, οπότε το Ρ είναι ορθόκεντρο στο $\overset{\Delta}{BHZ}$. Έτσι:

$$BP \perp HZ .$$

Αλλά $BE \perp HZ$, οπότε τα Β, Ε, Ρ είναι συνευθειακά.

Μπάμπης Στεργίου

ArJun.52 α) Επειδή ΑΒ // ΓΗ, είναι:

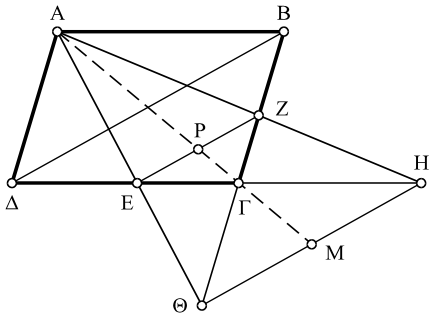
$$\frac{AZ}{ZH}=\frac{BZ}{Z\Gamma} \qquad (1).$$

Επειδή ΑΔ // ΓΘ, παίρνουμε:

$$\frac{AE}{E\Theta}=\frac{\Delta E}{E\Gamma} \qquad (2).$$

Είναι όμως ΕΖ // ΒΔ, οπότε $\frac{BZ}{Z\Gamma}=\frac{\Delta E}{E\Gamma}$. Επομένως $\frac{AZ}{ZH}=\frac{AE}{E\Theta}$, οπότε στο $\overset{\Delta}{A\Theta H}$ είναι:

ΕΖ // ΘΗ.



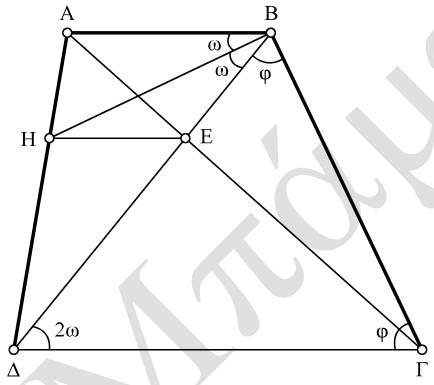
β) Από το θεώρημα Ceva είναι:

$$\frac{M\Theta}{MH}\cdot\frac{ZH}{ZA}\cdot\frac{EA}{E\Theta}=1\Leftrightarrow\frac{M\Theta}{MH}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\Theta=MH,$$

διότι $\frac{ZH}{ZA}=\frac{E\Theta}{EA}$, λόγω της ΕΖ // ΘΗ.

ArJun.53 Προεκτείνουμε τη ΒΗ και έστω Ζ το σημείο τομής των ΒΗ, ΓΔ. Είναι:



$$\frac{\Delta Z}{AB}=\frac{\Delta H}{HA}=\frac{\Gamma E}{AE}=\frac{\Delta E}{EB}=\frac{\Delta\Gamma}{AB}.$$

Άρα:

$\Delta Z=\Delta\Gamma=B\Delta\Rightarrow Z\hat{B}\Delta=B\hat{Z}\Delta=Z\hat{B}A$.

Έτσι, η ΒΗ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{B}E$ και η γωνία $H\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή.

Άλλος τρόπος

Από θεώρημα Θαλή στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AH}{H\Delta} \qquad (1).$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΕΑΒ, ΕΓΔ έχουμε:

$$\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{B\Delta} \qquad (2).$$

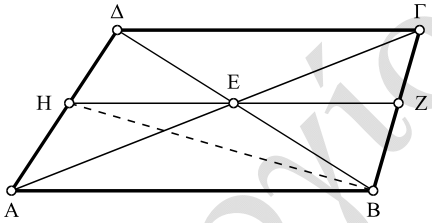
α) Από (1), (2) θα ισχύει το αντίστροφο θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου, δηλαδή:

$A\hat{B}H=H\hat{B}\Delta=\omega$.

β) Λόγω παραλληλίας $B\hat{\Delta}\Gamma=A\hat{B}\Delta=2\omega$ (εντός εναλλάξ), και από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ θα έχουμε $\Delta\hat{B}\Gamma=\Delta\hat{\Gamma}B=\varphi$. Συνεπώς:

$2\omega+\varphi+\varphi=180^o\Rightarrow\varphi+\omega=H\hat{B}\Gamma=90^o$.

Άλλος τρόπος



Είναι:

$$\frac{HE}{\Delta\Gamma}=\frac{AH}{A\Delta}=\frac{BZ}{B\Gamma}=\frac{EZ}{\Delta\Gamma}\Rightarrow HE=EZ \qquad (1).$$

Επομένως $\Gamma\hat{B}\Delta=\Delta\hat{\Gamma}B=E\hat{Z}B$. Άρα:

$BE=EZ$ (2).

Είναι ακόμα $E\hat{H}B=H\hat{B}A$ (3).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

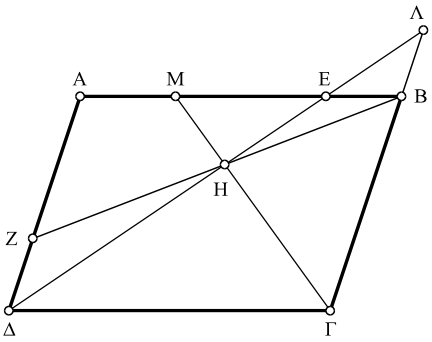
$HE=EZ=BE$ (4).

Επομένως:

$H\hat{B}Z=90^o$ και $E\hat{H}B=E\hat{B}H$ (5).

Από (3) και (5) έπεται ότι η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{B}A$.

ArJun.54 α) Στο $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta\Lambda}$ η ΓΗ είναι διχοτόμος.



β) ΖΔ // ΒΛ, οπότε $\overset{\Delta}{HZ\Delta}\approx\overset{\Delta}{HB\Lambda}$. Άρα:

$$\frac{\Delta Z}{B\Lambda}=\frac{\Delta H}{H\Lambda}\overset{(\alpha)}{=}\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Lambda}.$$

γ) Είναι ΕΒ // ΓΔ, οπότε:

$$\frac{BE}{\Gamma\Delta}=\frac{B\Lambda}{\Gamma\Lambda}\overset{(\beta)}{=}\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}.$$

Άρα $BE=\Delta Z$, οπότε:

$AZ=A\Delta-Z\Delta=BM-BE=ME$.

ArJun.55 Στην ΒΓ παίρνουμε $BP=AE$. Έτσι $AP\perp\Delta E$.

Μπάμπης Στεργίου

- $BZ \,//\, A\Delta$: $\dfrac{BZ}{A\Delta}=\dfrac{EB}{EA}\Leftrightarrow\dfrac{BZ}{\alpha}=\dfrac{\alpha-x}{x}\Leftrightarrow$

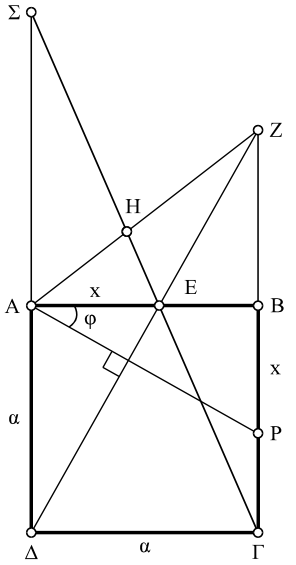
  $\Leftrightarrow BZ=\dfrac{\alpha(\alpha-x)}{x}$ (1).

- $\dfrac{HZ}{HA}=\dfrac{Z\Gamma}{A\Sigma}\Leftrightarrow\dfrac{HZ}{HA}\overset{(1)}{=}\dfrac{\alpha+\dfrac{\alpha(\alpha-x)}{x}}{\Sigma A}=$

  $=\dfrac{\alpha^2}{\Sigma A\cdot x}$ (2).

- $AE \,//\, \Delta\Gamma$: $\dfrac{AE}{\Gamma\Delta}=\dfrac{\Sigma A}{\Sigma\Delta}\Leftrightarrow\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{\Sigma A}{\Sigma A+\alpha}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\dfrac{x}{\alpha-x}=\dfrac{\Sigma A}{\alpha}\Leftrightarrow\Sigma A=\dfrac{\alpha\cdot x}{\alpha-x}$.



Η (2) δίνει:

$$\frac{HZ}{HA}=\frac{\alpha^2}{x\cdot\dfrac{\alpha x}{\alpha-x}}=\frac{\alpha(\alpha-x)}{x^2}\quad(3).$$

Είναι επίσης:

$$\frac{BZ}{BP}=\frac{\dfrac{\alpha(\alpha-x)}{x}}{x}=\frac{\alpha(\alpha-x)}{x^2}\quad(4).$$

Οι (3), (4) δίνουν:

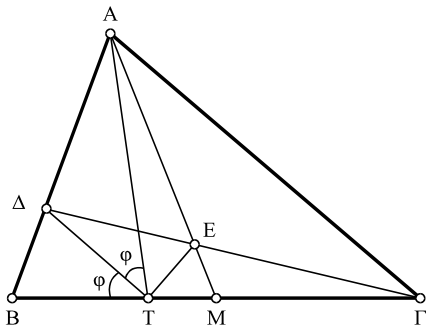
$$\frac{HZ}{HA}=\frac{BZ}{BP},$$

δηλαδή $BH \,//\, AP$. Άρα $BH\perp\Delta Z$, αφού:

$$AP\perp\Delta Z.$$

ArJun.56 Αφού η ΤΔ είναι διχοτόμος, έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{TA}{TB}\quad(1).$$



Στο $\overset{\Delta}{AMB}$ με τέμνουσα την ΔΕΓ το θεώρημα Μενελάου δίνει:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{\Gamma B}{\Gamma M}\cdot\frac{EM}{EA}=1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{TA}{TB}\cdot 2\cdot\frac{EM}{EA}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{EM}{EA}=\frac{TB}{2TA}\quad(2).$$

Όμως $T\Gamma=2TB$, οπότε:

$$TM=MB-TB=\frac{B\Gamma}{2}-\frac{B\Gamma}{3}=$$

$$=\frac{B\Gamma}{6}=\frac{3BT}{6}=\frac{BT}{2},$$

δηλαδή $BT=2TM$. Έτσι η (2) δίνει:

$$\frac{EM}{EA}=\frac{2TM}{2TA}=\frac{TM}{TA}.$$

Άρα η ΤΕ είναι διχοτόμος του $\overset{\Delta}{TAM}$, οπότε $TE\perp T\Delta$.

Μπάμπης Στεργίου

Μπάμπης Στεργίου