ΜΠΑΜΠΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΝΕΩΝ

Α. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 2011-2020

Αρχιμήδης Junior- ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΕΠΙΛΟΓΕΣ

1. ΑΣΚΗΣΗ 2020

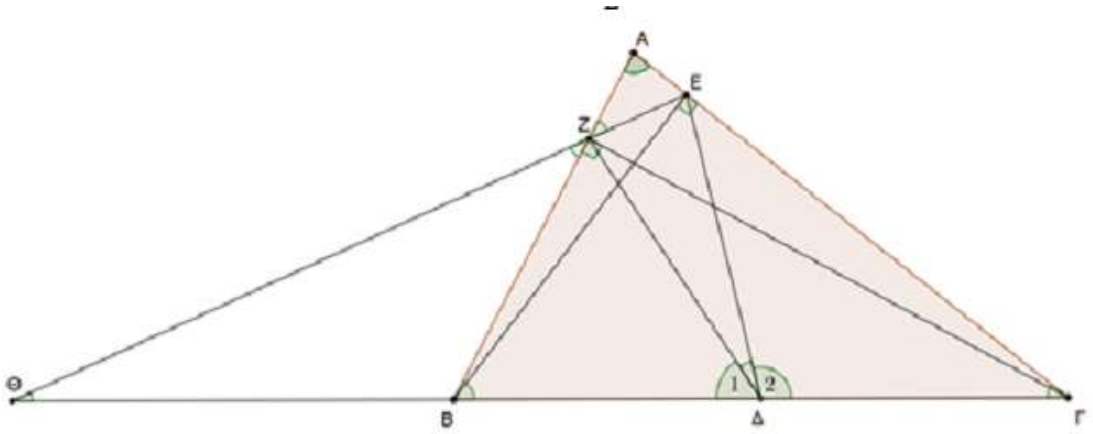
Πρόβλημα 2.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΖΔΕ συναρτήσει της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να βρείτε τη γωνία $B\hat{\Theta}Z$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και η ΖΔ είναι η διάμεσος του προς την υποτείνουσα, οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $Z\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = B\hat{\Delta}Z = 180^0 - 2\hat{B} \qquad (1)$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ βρίσκουμε και την ισότητα

$$\hat{\Delta}_2 = \Gamma\hat{\Delta}E = 180^0 - 2\hat{\Gamma} \qquad (2)$$

Άρα είναι

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \left(180^0 - 2\hat{B}\right) + \left(180^0 - 2\hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(180^0 - \hat{A}\right) = 2\hat{A} \ ,$$

οπότε

$$Z\hat{\Delta}E = 180^0 - \left(\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2\right) = 180^0 - 2\hat{A}.$$

Επιπλέον, επειδή το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές (αφού $\Delta Z = \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$), έχουμε:

$$\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{E}Z = \frac{180 - (180^0 - 2\hat{A})}{2} = \hat{A}.$$

(β) Από το τρίγωνο ΒΘΖ και τη σχέση μιας εξωτερικής γωνίας με τις απέναντι εσωτερικές έχουμε

$$\hat{B} = B\hat{\Theta}Z + B\hat{Z}\Theta. \qquad (3)$$

Όμως είναι

$$B\hat{Z}\Theta = A\hat{Z}E \qquad (4)$$

ως κατά κορυφή, ενώ από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΖΕΓ (αφού $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90^0$) έχουμε

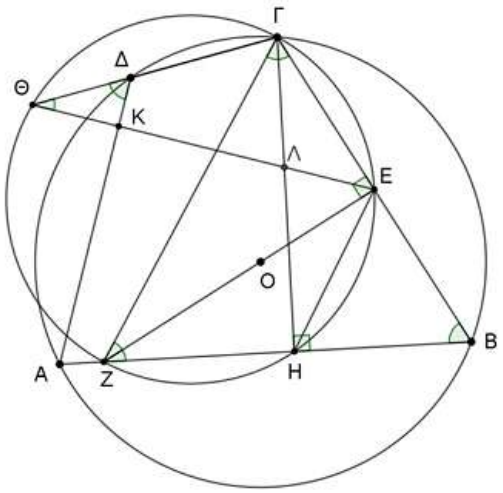
$$A\hat{Z}E = \hat{\Gamma}\ . \qquad (5)$$

2. ΑΣΚΗΣΗ 2019

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή $\Gamma\hat{H}Z = \Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$, έπεται ότι $A\hat{H}\Lambda = 90^\circ$ Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$. Επειδή $\Delta\hat{K}\Theta = A\hat{K}\Lambda$ (ως κατά κορυφή γωνίες), αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο ΔΘΚ οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή: $\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = 90^\circ$.
Όμως έχουμε ότι:

$\Delta\hat{\Theta}K = \Gamma\hat{\Theta}E = \Gamma\hat{Z}E$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)

$\Gamma\hat{Z}E = E\hat{Z}B$ (γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ)

Άρα έχουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K = E\hat{Z}B \qquad (1).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\Theta\hat{\Delta}K = Z\hat{B}E \qquad (2)$$

(εσωτερική και απέναντι εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ)
Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = E\hat{Z}B + Z\hat{B}E = 90^\circ,$$

γιατί το τρίγωνο ZBE είναι ορθογώνιο στο Ε.

3. ΑΣΚΗΣΗ 2018

Πρόβλημα 4

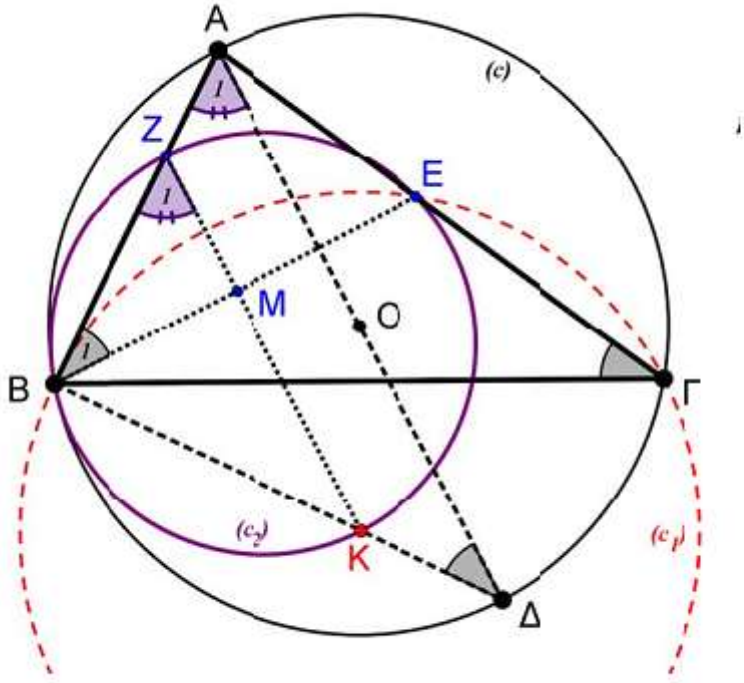
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $B\Delta$ και περνάει από τα σημεία B και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BKE, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

Λύση (1ος Τρόπος)

Έστω Z η τομή του κύκλου c_2 με την AB και M η τομή της KZ με την BE. Η γωνία $AB\Delta$ (άρα και η γωνία ZBK) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο $A\Delta$ του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$.

Εφόσον $ZBK = 90°$, η ZK είναι διάμετρος του κύκλου c_2 και κατά συνέπεια η ZK θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής BE των κύκλων c_1 και c_2. Η AB εφάπτεται στον κύκλο c_1, άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BMZ έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = 90° - \hat{B}_1 = 90° - \hat{\Gamma} \quad . \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$, έχουμε: $\hat{A}_1 = 90° - \hat{\Delta} = 90° - \hat{\Gamma}$ (2).

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{A_1} = \widehat{Z_1}$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το

τετράπλευρο $A\Delta KZ$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το O είναι το μέσο της $A\Delta$, συμπεραίνουμε ότι η OB θα διέρχεται από το μέσο της KZ που είναι το κέντρο του κύκλου c_2. Άρα τα κέντρα των κύκλων c, c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο B.

Εφόσον τα τμήματα $A\Delta$ και KZ (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων c και c_2) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το B και οι κύκλοι c και c_2 θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων c, c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος

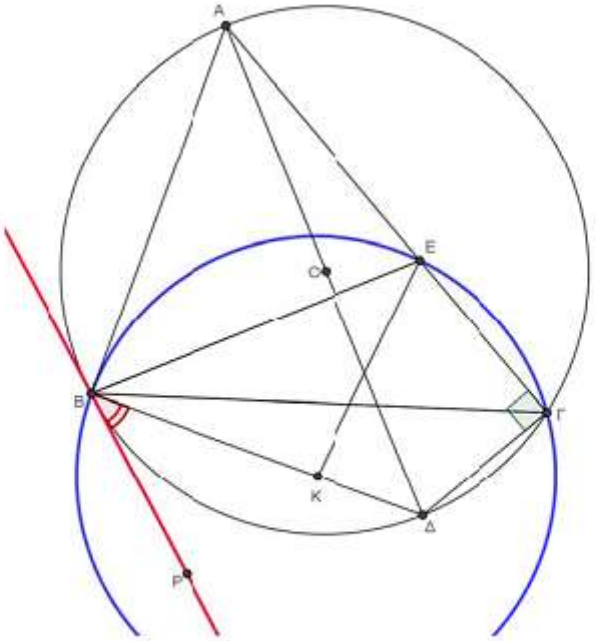
Θα αποδείξουμε ότι ο c_2 εφάπτεται του κύκλου $c(O,R)$ στο σημείο B. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B. Έστω BP η εφαπτομένη του $c(O,R)$ στο σημείο B και ονομάζουμε $\widehat{KBP}=\omega$. Για να δείξουμε ότι η BP είναι εφαπτομένη του c_2 στο B, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{BEK}=\omega\ . \qquad (1)$$

Επειδή η BP η εφαπτομένη του $c(O,R)$, έχουμε ότι $\widehat{\Delta\Gamma B}=\omega$. Επιπλέον η $A\Delta$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{A\Gamma\Delta}=90^\circ$, οπότε $\widehat{E\Gamma B}=90^\circ-\omega$. Όμως

$$\widehat{BKE}=2\widehat{B\Gamma E}=2(90^\circ-\omega)=180^\circ-2\omega, \qquad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον c_1. Όμως το τρίγωνο BKE είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{KBE}=\widehat{KEB}=\omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.

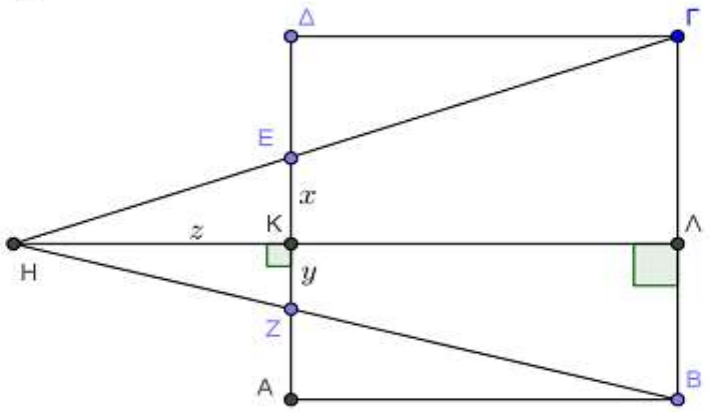


4. ΑΣΚΗΣΗ 2017

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\Delta E = \frac{\alpha}{3}$ και $AZ = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Φέρνουμε το ύψος ΗΛ του τριγώνου ΒΓΗ το οποίο τέμνει κάθετα την ΑΔ στο σημείο Κ. Θέτουμε ΕΚ = x, ΚΖ = y και ΚΗ = z. Είναι ΗΛ = $\alpha + z$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ είναι ίσο με

$$E = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma \cdot H\Lambda = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + z) \quad . \qquad (1)$$

Αρκεί να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΕΗΚ είναι όμοια, αφού $\Gamma\hat{\Delta}E = E\hat{K}H = 90^o$ και $\Delta\hat{E}\Gamma = K\hat{E}H$ ως κατά κορυφή. Επομένως, έχουμε

$$\frac{KH}{\Gamma\Delta} = \frac{KE}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\alpha}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \qquad (2)$$

Ομοίως, τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΚΗ είναι όμοια, οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{KH}{AB} = \frac{KZ}{AZ} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{y}{\frac{\alpha}{4}} \Leftrightarrow z = 4y \quad . \qquad (3)$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$x + y = A\Delta - AZ - \Delta E = \alpha - \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{3} = \frac{5\alpha}{12} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4) παίρνουμε

$$x + y = \frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow \frac{z}{3} + \frac{z}{4} = \frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow z = \frac{5\alpha}{7} \ ,$$

οπότε η (1) γίνεται

$$E = \frac{1}{2}\alpha\left(\alpha + \frac{5\alpha}{7}\right) = \frac{12\alpha^2}{14} = \frac{6\alpha^2}{7} .$$

2ος τρόπος. Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $ZE = \alpha - \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{3} = \frac{5\alpha}{12}$. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΖΕΓΒ είναι:

$$(ZE\Gamma B) = \frac{\frac{5\alpha}{12} + \alpha}{2} \cdot a = \frac{17a^2}{24}.$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ΖΗΕ και ΒΗΓ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας αυτών, δηλαδή

$$\frac{(B\Gamma H)}{(ZHE)} = \left(\frac{B\Gamma}{ZE}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{5\alpha/12}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{(B\Gamma H)}{(B\Gamma H) - (BZE\Gamma)} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(B\Gamma H)}{(B\Gamma H) - \frac{17\alpha^2}{24}} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

και λύνοντας ως προς $(B\Gamma H)$ παίρνουμε ότι $(B\Gamma H) = \frac{6\alpha^2}{7}$.

5. ΑΣΚΗΣΗ 2016

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΔ // ΒΓ)$ με $\hat{Α} = \hat{Β} = 90°$ και $ΑΔ < ΒΓ$. Ονομάζουμε $Ε$ το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$, $Ζ$ το συμμετρικό του $Α$ ως προς την ευθεία $ΒΓ$ και $Μ$ το μέσον της $ΕΖ$. Αν δίνεται ότι η ευθεία $ΓΜ$ είναι κάθετη στην ευθεία $ΔΖ$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $ΖΓ$ είναι κάθετη στην ευθεία $ΕΓ$.

Λύση

Έστω ότι η $ΔΖ$ τέμνει τις $ΓΜ, ΒΓ$ στα $Κ, Ν$ αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο $ΑΔΖ$, έχουμε ότι $Β$ μέσον του $ΑΖ$ και $ΒΝ // ΑΔ$, οπότε έχουμε ότι $Ν$ μέσον του $ΖΔ$.

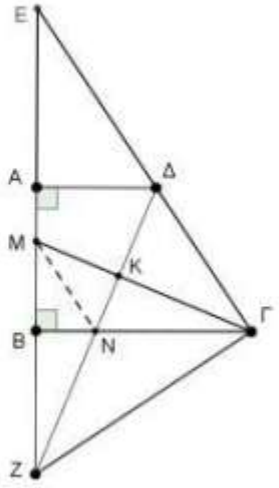
Επομένως στο τρίγωνο $ΖΕΔ$ η $ΜΝ$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:

$$ΜΝ // ΕΔ \qquad (1)$$

Επιπλέον στο τρίγωνο $ΜΓΖ$, τα $ΓΒ, ΖΚ$ είναι ύψη, άρα το σημείο $Ν$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε:

$$ΜΝ \perp ΖΓ \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $ΖΓ \perp ΕΓ$, που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

6. ΑΣΚΗΣΗ 2015

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ \le ΑΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O, R)$. Η κάθετη από την κορυφή $Α$ προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $Γ$ την τέμνει στο σημείο $Δ$.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, να αποδείξετε ότι $ΓΔ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

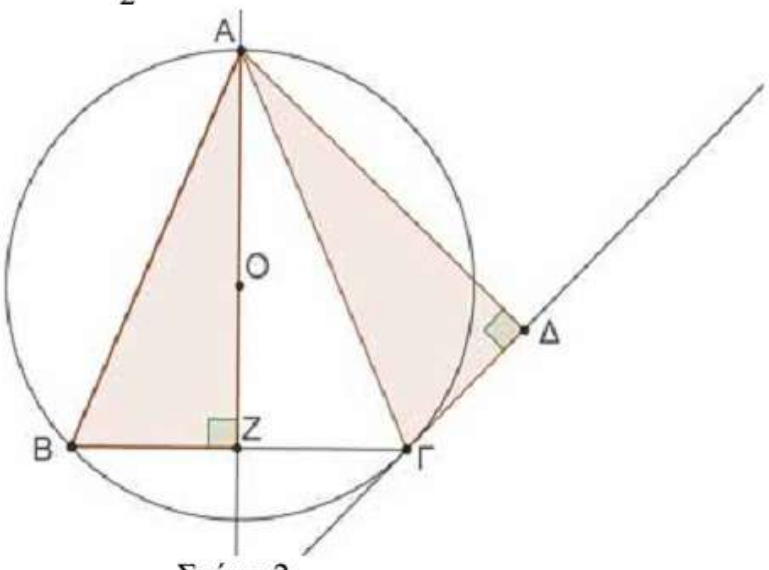
(β) Αν ισχύει ότι $ΓΔ = \dfrac{ΒΓ}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Λύση

(α) Αν $Ζ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΒΓ$, τότε η $ΑΖ$ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΓΖ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα, γιατί έχουν:

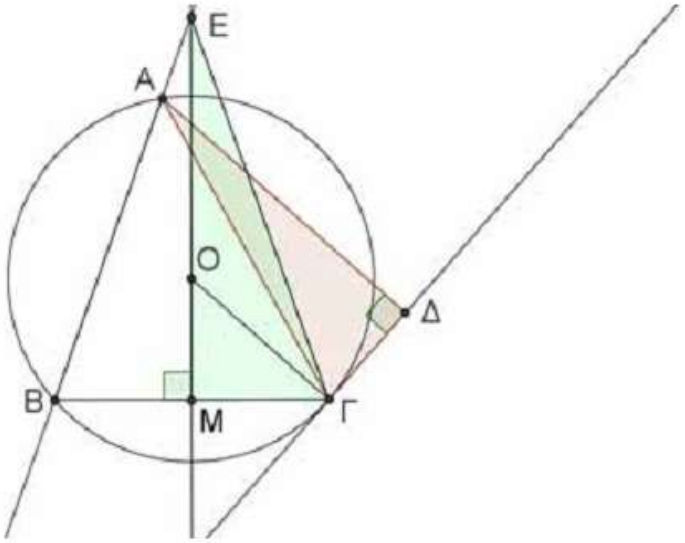
- $ΑΓ$ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)
- $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Γ}Ζ$, αφού $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Β}Γ$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Γ}Ζ$, αφού $ΑΒ = ΑΓ$.

Επομένως θα είναι και $ΓΔ = ΓΖ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο Μ της ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Τότε $\hat{AB\Gamma} = \hat{A\Gamma\Delta}$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\Gamma\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΜ και ΑΓΔ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $\hat{EA\Gamma} = 180° - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο ΕΑΓ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές.



Σχήμα 3

7. ΑΣΚΗΣΗ 2014

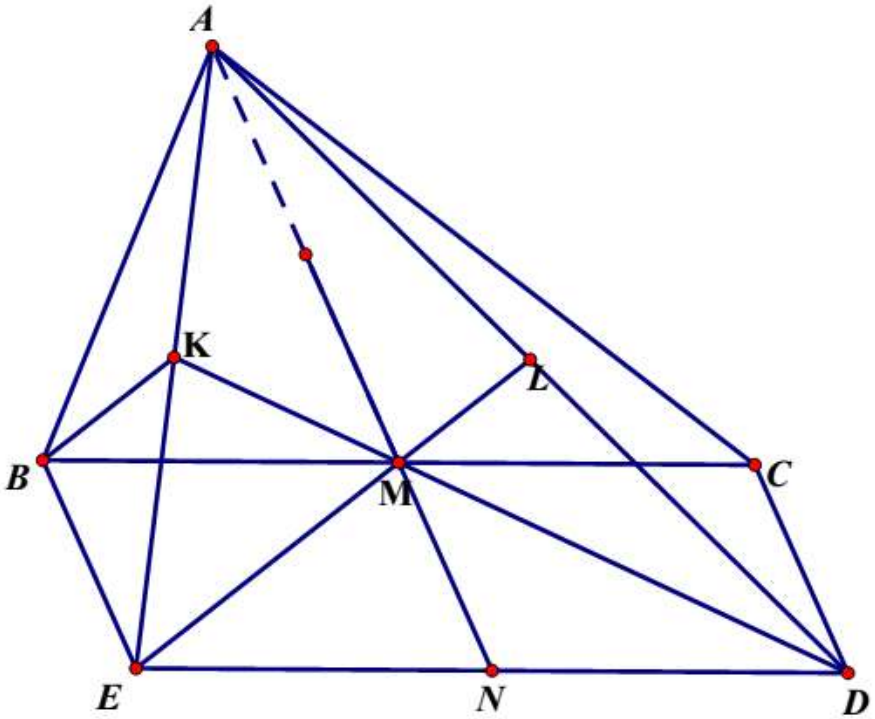
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο BCDE, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Λύση

Προεκτείνουμε την AM μέχρι να τμήσει την ED στο σημείο N. Τότε το τετράπλευρο $BMNE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $EN = BM = MC = ND$. Άρα το N είναι το μέσον του ED. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\frac{AM}{MN} = 2$ και το M είναι πάνω στη διάμεσο του τριγώνου EAD, οπότε το M είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου AED. Επομένως η ευθεία EM είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου AED που άγεται από την κορυφή E, οπότε θα τέμνει την πλευρά AD στο μέσο της.

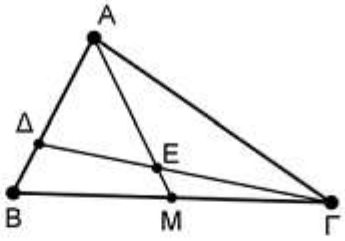


Σχήμα 1

8. ΑΣΚΗΣΗ 2013

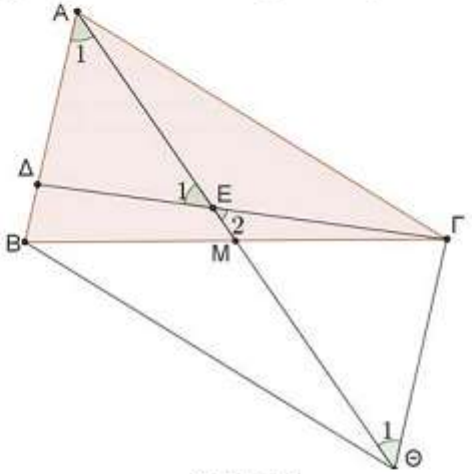
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο Ε, τότε ισχύει ότι $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma E$.



Λύση (1ος τρόπος)

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Theta = AM$. Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Theta\Gamma$ διχοτομούνται το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1

Άρα είναι $AB \parallel \Gamma\Theta$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Theta}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι και $\hat{\Theta}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο $E\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελές με $\Gamma E = \Gamma\Theta$. Όμως από το παραλληλόγραμμο $AB\Theta\Gamma$ έχουμε ότι $AB = \Gamma\Theta$, οπότε από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει το ζητούμενο $AB = \Gamma E$.

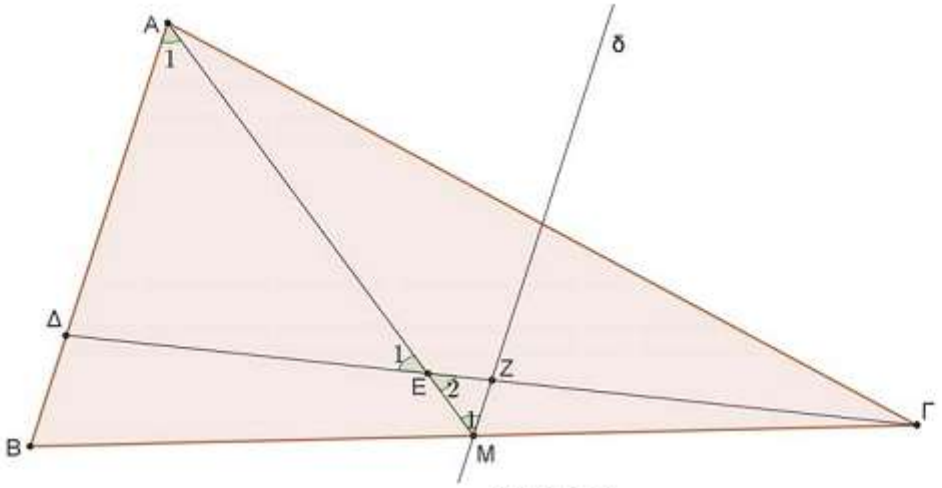
2ος τρόπος

Από το μέσο Μ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την πλευρά AB, άρα και προς την πλευρά $B\Delta$ του τριγώνου $B\Gamma\Delta$, η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, έστω στο σημείο Ζ. Τότε το Ζ θα είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$, δηλαδή

$$\Gamma Z = Z\Delta \qquad (1)$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$B\Delta = 2 \cdot MZ. \qquad (2)$$



Σχήμα 2

Επίσης έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή.

Άρα είναι και $\hat{M}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο EMZ είναι ισοσκελές με

$$ZM = EZ. \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma E &= \Gamma Z + ZE \\ &= \Delta Z + ZE \qquad (\text{λόγω της (1)}) \\ &= \Delta E + 2 \cdot ZM \qquad (\text{λόγω της (3)}) \\ &= A\Delta + \Delta B = AB. \qquad (\text{λόγω της υπόθεσης και της (2)}) \end{aligned}$$

9. ΑΣΚΗΣΗ 2012

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ) τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

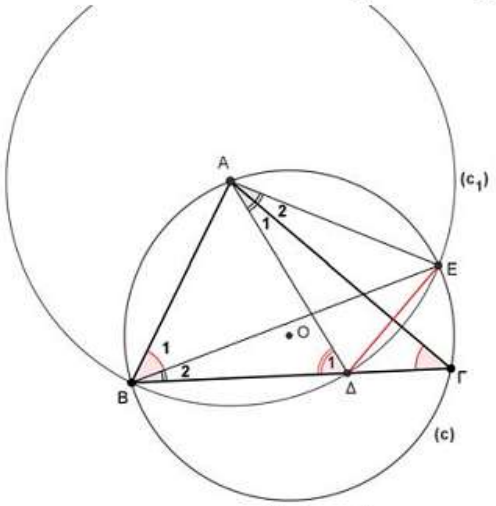
Λύση (1ος τρόπος)

Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $\Gamma\hat{B}E$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O, R)$ (σχήμα 1) και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma E}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή έχουμε

$$\hat{A}_2 = \Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{B}E. \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $\Delta\hat{B}E$ που είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{B}E$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $c_1(A, AB)$ και βάνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta E}$, ενώ η γωνία $\Delta\hat{A}E$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\Delta\hat{B}E$. Επομένως έχουμε

$$\Gamma\hat{B}E = \Delta\hat{B}E = \frac{\Delta\hat{A}E}{2} = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 1

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\hat{A}_2 = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2}, \qquad (3)$$

από την οποία προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

$2^{ος}$ τρόπος

Οι χορδές ΑΒ και ΑΕ του κύκλου (c) είναι ίσες μεταξύ τους, ως ακτίνες του κύκλου (c_1), οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = A\hat{E}B. \quad (3)$$

Όμως οι γωνίες $A\hat{E}B$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή

$$A\hat{E}B = \hat{\Gamma}. \quad (4)$$

Από τις (3) και (4), έχουμε

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = \hat{\Gamma} \quad (5)$$

και επομένως προκύπτει ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \quad (6)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}B = \hat{B}$ και επειδή η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2. \quad (8)$$

Επιπλέον, οι γωνίες $\hat{B}_2$ και $\Gamma\hat{A}E = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma E}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$$\hat{A}_2 = \Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{B}E = \hat{B}_2. \quad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) λαμβάνουμε την ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B} - \hat{\Gamma}$, από την οποία προκύπτει ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

10. ΑΣΚΗΣΗ 2011

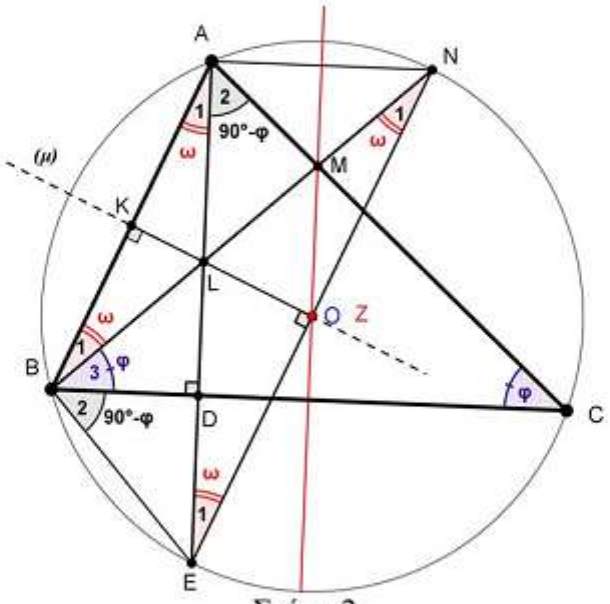
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο $\boldsymbol{Z}$.

Να αποδείξετε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \;\; ή \;\; Z \equiv O)$, δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Λύση

Επειδή το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετη του AB, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB // EN$, οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



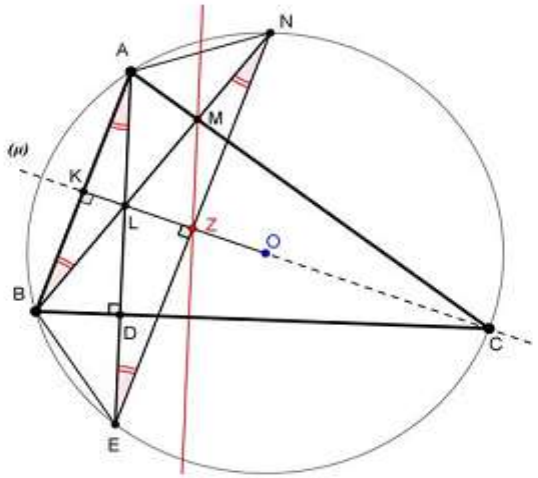
Σχήμα 2

Έστω ότι το σημείο Z ταυτίζεται με το σημείο O (Σχήμα 2).

Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $E\hat{B}N = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$. Αν $\hat{C} = \hat{\varphi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\varphi}$.

Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\varphi}$. Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετη του BC ($MB = MC$). Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z, συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC.

Έστω ότι το τρίγωνο ABC ***είναι ισοσκελές*** $(CA=CB)$**.** Τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (Σχήμα 2), δηλαδή το L είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια ***το σημείο*** M ***είναι το μέσο του τμήματος*** LN (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 3

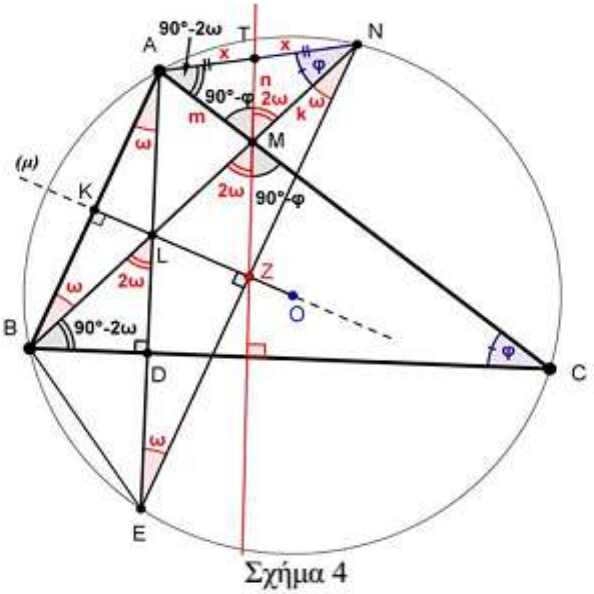
Το σημείο Z ***είναι το μέσο του τμήματος*** EN (διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN).

Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ ***είναι κάθετη στην*** BC ***και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο*** ABC ***είναι ισοσκελές*** $(CA=CB)$ ***ή το σημείο*** Z ***ταυτίζεται με το κέντρο*** O ***του περιγεγραμμένου κύκλου (Σχήμα 4).***

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC. Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE $(MZ \,//\, AE)$.

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ \,//\, AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό $(E_1=(MTA)=(MTN)=E_2)$.



Σχήμα 4

Από την παραλληλία $MZ // AE$, προκύπτει η "μεταφορά" γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος. Σημειώνουμε ότι:

$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).
$L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD // MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2}mn\,\eta\mu(90-\varphi) = \frac{1}{2}mx\,\eta\mu(90-2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}kn\,\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2}kx\,\eta\mu\varphi$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu 2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{\eta\mu\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu 2\varphi = \eta\mu 4\omega\,.$$

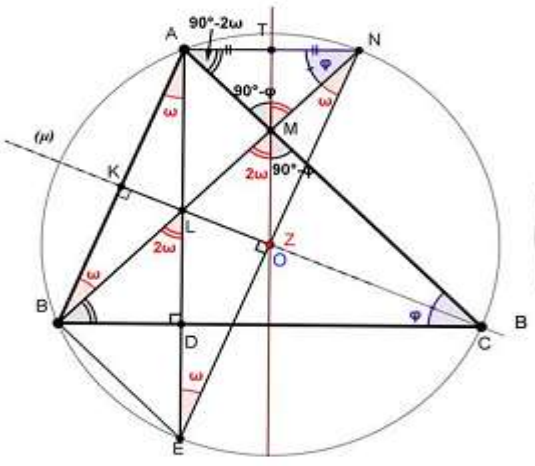
Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω,φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi = 4\omega \Leftrightarrow \varphi = 2\omega \quad (A) \quad \text{ή} \quad 2\varphi = \pi - 4\omega \Leftrightarrow \varphi + 2\omega = \frac{\pi}{2} \quad (B)\,.$$

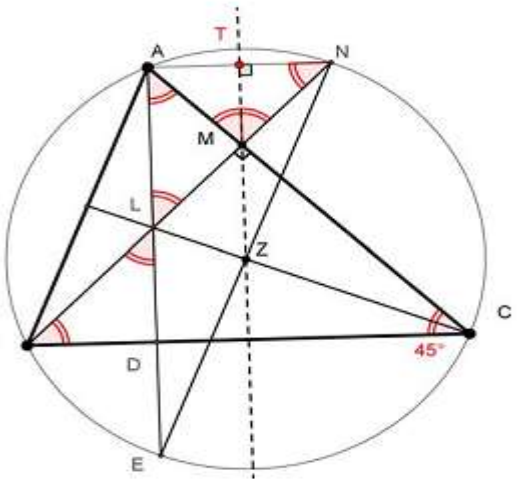
Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές $(TM = TN)$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M $(A\hat{M}N = 90^o)$. Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές $(CA = CB)$ διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T, δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN. Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z \equiv O$).

Παρατήρηση



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ και $\hat{C} = \hat{\varphi} = 45^o$, τότε τα τρίγωνα TMN, TMA και AMN είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο $ABCN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η TM είναι μεσοκάθετη της BC.

Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z *ταυτίζεται με το σημείο* O*, οπότε η διάζευξη των προτάσεων* $(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O)$ *είναι εγκλειστική.*