Η ΧΡΗΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: Η ΓΝΩΣΗ ΣΕ ΚΑΝΕΙ ΚΑΛΥΤΕΡΟ

Ζάχος Β. Ιωάννης, Καθηγητής Μαθηματικών του Ενιαίου Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής

Εισαγωγή

Η άποψη ότι η διδασκαλία κάποιων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, όπως είναι για παράδειγμα αυτές οι οποίες προτάθηκαν από τον Polya (1973) συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, έτυχε ευρείας αποδοχής από τους δασκάλους των μαθηματικών και στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ωστόσο, τα ερευνητικά αποτελεσματα δεν είναι τέτοια που να δικαιολογούν τον αρχικό ενθουσιασμό (Sweller & Cooper, 1985). Άλλες διδακτικές προσεγγίσεις οι οποίες είναι βασισμένες στην απόκτηση γνώσης, φαίνεται να έχουν καλύτερα αποτελέσματα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Στις επόμενες παραγράφους αναπτύσσεται αυτό το επιχείρημα διεξοδικά.
Μέσα από ένα παράδειγμα – μια διδακτική δραστηριότητα - που παρατίθεται στο επόμενο τμήμα της εργασίας θα επιχειρήσω πρώτα, να σας μεταφέρω την αίσθηση που έχω αποκομίσει ως εκπαιδευτικός, για τον καθοριστικό ρόλο της γνώσης στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας .

Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά σε συμπεράσματα σημαντικών ερευνών της γνωστικής ψυχολογίας που καταδεικνύουν το καθοριστικό ρόλο της γνώσης στην ανάπτυξη ειδίκευσης σε ένα τομέα γνώσεων.

Τέλος, στο τρίτο μέρος, προτείνονται συγκεκριμένα διδακτικά εργαλεία με στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Τα διδακτικά αυτά εργαλεία, τα οποία παρουσιάζονται στο τελευταίο τμήμα με τη βοήθεια παραδειγμάτων, είναι προϊόντα μακροχρόνιων ερευνών οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί στο χώρο της γνωστικής ψυχολογίας.

Ι. Γνώσεις ή Στρατηγικές Επίλυσης; Τα Πράγματα Μπορεί να μην Είναι όπως Φαίνονται

Η διδακτική δραστηριότητα για την οποία γίνεται λόγος σε αυτό το τμήμα της εργασίας προέρχεται από μαθήματα που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια της Πρόσθετης Διδακτικής Στήριξης στο Βαρβάκειο Λύκειο. Τα μαθήματα αυτά οργανώνονται αρκετά χρόνια τώρα και απευθύνονται σε μαθητές της Α΄ Λυκείου με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Τα προβλήματα που συζητώνται στη διάρκεια των μαθημάτων αυτών είναι ιδιαίτερα απαιτητικά για τους μαθητές. Σε τέτοιου είδους προβλήματα η ανάγκη για γνώση κάποιων ειδικών κανόνων και τεχνικών είναι πολύ μεγάλη. Πολλά από τα προβλήματα αυτά προέρχονται από διάφορους διαγωνισμούς μαθηματικών ανά τον κόσμο. Δουλεύοντας με τους μαθητές αυτούς πάνω σε τέτοια προβλήματα, αποκομίζει κανείς την αίσθηση ότι, αν ένας μαθητής δεν κατέχει τον συγκεκριμένο κανόνα ή την τεχνική που «ξεκλειδώνει» το πρόβλημα, οι πιθανότητες να το λύσει μόνος του είναι πολύ περιορισμένες. Ο Πίνακας 1 εμφανίζει δύο προβλήματα με το ίδιο ζητούμενο καθώς και την τεχνική (ή κανόνα) που απαιτείται για τη λύση τους.

Πίνακας 1

Πρόβλημα 1

Να δείξετε ότι ο αριθμός

$A = \sqrt{2002^{2001} + 2003^{2004}}$ *δεν είναι ρητός*

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$A = \sqrt{\beta^2 + 3\beta + 1}$, $\beta \in \mathbb{N}^*$ *δεν είναι ρητός (Διαγ. ΕΜΕ, 1992)*

Απαιτούμενη γνώση υπό μορφή κανόνα

«Κανένα τετράγωνο ακεραίου δεν τελειώνει σε 2, 3, 7, 8»

Αν ένας ακέραιος βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων, δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.»

Στη σειρά αυτή των μαθημάτων, έχω πραγματοποιήσει μια σημαντική στροφή όσον αφορά στο «κέντρο βάρους» της διδασκαλίας στα τμήματα αυτά. Το «κέντρο βάρους» της διδασκαλίας έχει μετατοπιστεί από τη χρήση στρατηγικών για τη λύση προβλημάτων, προς την διδασκαλία κάποιας συγκεκριμένης ύλης υπό μορφή κανόνων και τεχνικών.

Η μετατόπιση αυτή του «κέντρου βάρους» δικαιολογείται και από τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας στη χρήση στρατηγικών. Διαφαίνεται, ότι η εμμονή στη χρήση στρατηγικών, όπως αυτές που εισηγήθηκε ο Polya (1973), δεν δικαιολογείται από τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών (Sweller & Cooper, 1985). Επιπλέον, όπως επισημαίνουν ερευνητές που έχουν πειραματιστεί με τα οφέλη από τη χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (π.χ. Schoenfeld, 1985) αυτές, στην πλειοψηφία τους, είναι τόσο προφανείς, που δεν αποτελούν παρά στοιχείο του «κοινού νου».

Το επόμενο πρόβλημα καθώς και το απόσπασμα που ακολουθεί στον Πίνακα 2 είναι μέρος διαλόγου, που διεξήχθη κατά τη διάρκεια ενός εναρκτήριου μαθήματος, στα πλαίσια της ανάπτυξης ειδίκευσης στη λύση μαθηματικών προβημάτων. Από το απόσπασμα φαίνεται ότι αυτό που προτείνει η μαθήτρια, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η χρήση της στρατηγικής των ενδιαμεσων υποσκοπών, η οποία επιτρέπει να πλησιάσουμε στη λύση του αρχικού προβλήματος μέσω της επίλυσης ενός ενδιάμεσου απλούστερου προβλήματος. Ωστόσο, το πρόβλημα τελικά δεν λύθηκε από τους μαθητές, παρά τις προσπάθειες που κατέβαλαν και παρά το γεγονός ότι έκαναν χρήση μιας ισχυρής στρατηγικής, όπως είναι η ανάλυση προβλήματος σε απλούστερα με τη χρήση υποσκοπών.

Η λύση του προβλήματος κατέστη δυνατή, μονον όταν συζητήθηκε ο κατάλληλος κανόνας: «ομαδοποίησε τις δυνάμεις με τρόπο ώστε το τελευταίο ψηφίο να παραμένει αναλλοίωτο». Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, ενδείκνυται η γραφή του 2^{1000} στη μορφή $(2^4)^{250}$, αφού $2^4 = 16$ και οι αριθμοί που τελειώνουν σε 6 πολλαπλασιαζόμενοι με αριθμούς που τελειώνουν επίσης σε 6, έχουν ως αποτέλεσμα αριθμούς που τελειώνουν σε 6.

Πίνακας 2

Πρόβλημα. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του 2^{1000}.

……………………………… *(χρόνος για σκέψη και να αφομοιώσουν το πρόβλημα)*

Καθ. *Ο εκθέτης του 2 είναι πολύ μεγάλος θα μπορούσαμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό;*
(Μια μαθήτρια πρότεινε να το γράψουμε $2^{100}.2^{100}...2^{100}$)........
Καθ. *Δοκιμάστε να υπολογίσετε μερικές δυνάμεις του 2, μήπως βρείτε κάποιο κανόνα για τον τρόπο που μεταβάλλονται....*
Μαθ. *Να το σπάσουμε κι' άλλο (το 2^{100}), ...όμως πάλι οι παράγοντες θα είναι πολλοί.*
....
(Η επόμενη ερώτηση διατυπώθηκε στην προσπάθεια μου να τους βοηθήσω περισσότερο προς την κατεύθυνση της περιοδικότητας των δυνάμεων...)
Καθ. *Το 2^{1000} μπορεί να τελειώνει σε μονό αριθμό π.χ. 1, 3, 5 κλπ.;*
....
Καθ. *Από τον πολλαπλασιασμό ποιών ψηφίων προκύπτει το τελευταίο ψηφίο του γινομένου δύο αριθμών;*
....
Καθ. *Υπάρχουν ψηφία τα οποία όταν πολλαπλασιάζονται με τον εαυτό τους παραμένουν «αναλλοίωτα»........*
Καθ. *Όπως βλέπετε το 1x1, 5x5, 6x6 δίνουν ως αποτέλεσμα αριθμό που τελειώνει σε 1, 5, 6 αντίστοιχα, δηλαδή το τελευταίο ψηφίο δεν αλλάζει. Παραμένει, όπως λέμε αναλλοίωτο ...*

Στη συνέχεια συζητήθηκε και ο εναλλακτικός τρόπος λύσης μέσω της περιοδικότητας που παρουσιάζει το τελευταία ψηφίο των δυνάμεων του 2.

Όταν, στη συνέχεια κλήθηκαν να απαντησουν στο πρόβλημα: " ποιό είναι το τελευταίο ψηφίο 3^{1000}" εύκολα βρήκαν την απάντηση είτε γράφοντας το ως $(3^4)^{250}$ είτε παρατηρώντας την περιοδικότητα στο τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 3.

Βέβαια, από παιδαγωγικής πλευράς, η προσέγγιση που βοηθάει τους μαθητές να ανακαλύψουν οι ίδιοι τη λύση ή τη γνώση που απαιτείται για τη λύση ενός προβλήματος, φαίνεται ιδιαίτερα ελκυστική. Ωστόσο, η ανακαλυπτική μέθοδος παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα. Ένα από τα μειονεκτήματα της είναι ότι είναι χρονοβόρα και επιπλέον, όπως έχουν δείξει σχετικές έρευνες, η μέθοδος της ανακάλυψης δεν βοηθάει τους αδύνατους μαθητές (π.χ. Snow & Yallow, 1982). Αντίθετα, όπως υποστηρίζουν οι ερευνητές αυτοί, στην περίπτωση των αδύνατων μαθητών, φαίνεται ότι η καλύτερη μέθοδος είναι η βήμα προς βήμα παρουσίαση της ύλης.

Επιπλέον, όσον αφορά στη χρήση γενικών στρατηγικών (όπως για παράδειγμα οι στρατηγικές που έχουν προταθεί από τον Polya) για την επίλυση προβλημάτων, φαίνεται ότι αυτές προσιδιάζουν στον κοινό νου. Μοιάζουν αυτονόητες. Και όπως επισημαίνει ο Schoenfeld (1985), παρά το γεγονός ότι κανείς από τους έμπειρους μαθηματικούς με κάποια ηλικία δεν διδάχθηκε μεθόδους λύσεις προβλήματος, παρ' όλα αυτά, οι μαθηματικοί αυτοί, χρησιμοποιούν τέτοιες στρατηγικές αν παραστεί ανάγκη. Αντιθέτως, φαινεται ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων βελτιώνεται σημαντικά με τη χρήση ειδικών στρατηγικών σχετικών με ένα τμήμα της ύλης (π.χ. Schoenfeld, 1985). Αυτές οι ειδικές στρατηγικές, οι οποίες είναι άμεσα συνδεδεμένες με ένα τμήμα της ύλης (domain specific strategies), δεν είναι τίποτα άλλο παρά τεχνικές υπό τη μορφή κανόνων που επιτρέπουν τη διαδικασιοποίηση της γνώσης.

Λαμβάνοντας υπόψη τις επισημάνσεις αυτές, είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς: ***Μήπως τελικά η υψηλή επίδοση και κατ΄ επέκταση η ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης δεν είναι θέμα απόκτησης κάποιων γενικών στρατηγικών αλλά κατοχής γνώσης; Έχει αναρωτηθεί κανείς ότι όταν προσπαθούμε να διδάξουμε στους μαθητές στρατηγικές επίλυσης και ανακάλυψης στην πραγματικότητα επιχειρούμε να διδάξουμε στους μαθητές τον «κοινό νού», δηλαδή το αυτονόητο; Μήπως τελικά η απόκτηση γνώσεων είναι η μόνη προϋπόθεση για τη χρήση κάποιων γενικών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος;***

Με σκοπό να αναζητήσουμε απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα, θα ανατρέξουμε σε πολύ σημαντικές έρευνες της γνωστικής ψυχολογίας σχετικά με το τι συνιστά υψηλή ειδίκευση σε ένα γνωστικό πεδίο και πως αυτή επιτυγχάνεται καλύτερα.

II. Αντλώντας Επιχειρήματα από τη Γνωστική Ψυχολογία

Για αρκετές δεκαετίες η γνωστική ψυχολογία έχει συμβάλλει στη μελέτη του φαινομένου της μάθησης με τουλάχιστον δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι η ανάπτυξη ενός εννοιολογικού συστήματος, όπως είναι για παράδειγμα οι έννοιες της βραχύχρονης μνήμης, της μακρόχρονης μνήμης, οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων κλπ. - το οποίο επέτρεψε τη μελέτη των φαινομένων της μάθησης από μια διαφορετική οπτική γωνία. Το εντυπωσιακό στην περίπτωση αυτή είναι ότι έννοιες όπως η βραχύχρονη μνήμη ή η ανάπτυξη των διαφόρων δεξιοτήτων δεν είναι θεωρητικά κατασκευάσματα, αλλά λειτουργίες οι οποίες σχετίζονται άμεσα με συγκεκριμένες περιοχές του εγκεφάλου, όπως καταδεικνύουν νεώτερες έρευνες της νευροφυσιολογίας (π.χ. η βραχύχρονη μνήμη εδράζεται στον κροταφιαίο λοβό). Ο δεύτερος τρόπος με τον οποίο η γνωστική ψυχολογία έχει συμβάλλει στην εκπαίδευση είναι ότι έχει δημιουργηθεί μια βάση ερευνητικών δεδομένων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση της διδασκαλίας. Ιδιαίτερα την τελευταία εικοσαετία έχει σημειωθεί τόσο μεγάλη πρόοδος σε ορισμένους τομείς της, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για «γνωστική τεχνολογία», δηλαδή, για μεθόδους και πρακτικές, που απορρέουν από τα συμπεράσματα των ερευνών στις γνωσιακές επιστήμες και είναι άμεσα εφαρμόσιμες για την αντιμετώπιση πλήθους καθημερινών προβλημάτων.

Ειδικότερα στο σχεδιασμό διδακτικών μεθόδων, ενα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της γνωστικής ψυχολογίας υπήρξε η ανάδειξη του καθοριστικού ρόλου της κατοχής από μέρους του μαθητή μιας πλούσιας και καλά οργανωμένης «βάσης δεδομένων» (ορισμοί, προτάσεις, θεωρήματα), αναφορικά με ένα γνωστικό αντικείμενο.

Μέσα από το ερευνητικό παράδειγμα «έμπειρων-αρχάριων», η γνωστική ψυχολογία συνέβαλλε στην απομυθοποίηση μιας αντίληψης με μεγάλη απήχηση. Η αντίληψη αυτή είχε να κάνει με την πεποίθηση ότι η υψηλή ειδίκευση σε ένα γνωστικό πεδίο συνδεέται με την κατοχή κάποιων γενικών κανόνων και στρατηγικών – όπως είναι για παράδειγμα οι στρατηγικές που περιγράφονται στο βιβλίο του Polya (1973) "How to Solve it"
(π.χ. ανάλυση μέσων και σκοπών, εύρεση και επίλυση ενός παρόμοιου αλλά ευκολότερου προβλήματος, χρήση υποσκοπών, κλπ.) που επιτρέπουν στον ειδικό να λύνει προβλήματα γρήγορα και σωστά. Μάλιστα, αρκετές φορές, η υψηλή ειδίκευση συνδέονταν και με την παρουσία κάποιου ιδιαίτερου χαρίσματος με το οποίο είναι προικισμένος ο ειδικός σε ένα τομέα γνώσεων. Ωστόσο, τα συμπεράσματα των ερευνών, από, πολλά γνωστικά πεδία, έδειξαν ότι η **υψηλή ειδίκευση βασίζεται στην αποθήκευση μεγάλου πλήθους κανόνων (νοητικών σχημάτων) στη μνήμη, με τρόπο ώστε να είναι εύκολα ανακλητοί και άμεσα εφαρμόσιμοι.**

Αυτό το συμπερασμα έχει μια πολύ απλή και άκρως ουσιώδη συνέπεια για την οργάνωση της διδασκαλίας. Αντί ο διδάσκων να αναλώσει το χρόνο του διδάσκοντας στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, να δώσει έμφαση στην οργανώση της ύλης υπό μορφή κανόνων δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές του να εφαρμόσουν αυτούς τους κανόνες σε απλά προβλήματα.

Στη συνέχεια είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε ορισμένες από τις σημαντικότερες έρευνες που οδήγησαν στα συμπεράσματα αυτά.

Ο Ρόλος της Γνώσης στη Λύση Προβλημάτων

Οι εργασίες οι οποίες συνέβαλλαν στην αναθεώρηση της φύσης της ειδίκευσης ξεκίνησαν από τις μελέτες του deGroot (1965) και των Chase & Simon (1973).

Ο A. deGroot μελέτησε διαφορές μεταξύ έμπειρων σκακιστών (grant-masters) και αρχαρίων. Συνέκρινε τις νοητικές λειτουργίες των grant-masters με αυτές των αρχαρίων. Σε ένα από τα πειράματά του ζήτησε από έμπειρους και αρχάριους σκακιστές να αναπαράγουν τις θέσεις των κομματιών (20 περίπου) που είχαν παρατηρήσει νωρίτερα σε μια σκακιέρα για λιγότερο από δέκα δευτερόλεπτα. Οι θέσεις των κομματιών στη σκακιέρα δεν ήσαν τυχαίες, αλλά «νόμιμες», δηλαδή προέρχονταν από την ενδιάμεση φάση μιας σκακιστικής παρτίδας. Όπως διαπίστωσε ο deGroot, οι grant-masters κατάφεραν να τοποθετήσουν τα κομμάτια στις σωστές θέσεις πάνω στη σκακιέρα. Αντίθετα, οι αρχάριοι κατάφεραν με μεγάλη δυσκολία να αναπαράγουν τις θέσεις 4-5 μεμονομένων κομματιών. Στο σημείο αυτό είναι φυσικό να σκεφτεί κανείς ότι οι grant-masters όφειλαν την υπεροχή τους σε κάποια ιδιαίτερη αντιληπτική ικανότητα στην οποία υστερούσαν οι αρχάριοι. Ωστόσο, ένα από τα επόμενα πειράματα ανατρέπει μια τέτοια υπόθεση. Έτσι όταν τα ίδια άτομα κλήθηκαν να αναπαράγουν τις θέσεις 20 περίπου κομματιών τα οποία ήσαν σε τυχαίες θέσεις οι grant-masters και οι αρχαριοι τα πήγαν το ίδιο άσχημα.

Μελετώντας τα πειράματα του deGroot οι Chase & Simon (1973) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι έμπειροι σκακιστές δεν ανακαλούσαν μεμονωμένα κομματια στη σκακιέρα, αλλά σκακιστικούς σχηματισμούς που αντιστοιχούσαν σε αμυντικούς και επιθετικούς συνδυασμούς, σύμφωνους με τις σκακιστικές τεχνικές. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις οι ερευνητές αυτοί κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι grant-masters αποθηκεύουν πληροφορίες στη μνήμη σε πακέτα (chunks) που αντιστοιχούν σε στερεότυπους σκακιστικούς συνδυασμούς.

Μια άλλη διαπίστωση του deGroot ήταν ότι οι έμπειροι σκακιστές δεν διέφεραν από τους αρχάριους ως προς το βάθος της αναζήτησης για την καλύτερη κίνηση. Έτσι, η υπεροχή των έμπειρων δεν έχει να κάνει με κάποια ιδιαίτερη οξύνοια ή αναλυτική ικανότητα του νου τους. Και οι δύο ομάδες αναζητούσαν την καλύτερη κίνηση σε βάθος 2 ή 3 κινήσεων. Το στοιχείο όμως στο οποίο διέφεραν οι έμπειροι σκακιστές από τους αρχάριους, ήταν η ικανότητα των πρώτων να εστιάζουν τη προσοχή τους, από την πρώτη στιγμή, στις καλύτερες πιθανές κινήσεις.

Ορισμένα από τα πειράματα του deGroot επαναλήφθηκαν από την M. Chi (1978). Το εντυπωσιακό στοιχείο με τα πειράματα της Chi ήταν ότι ως «ειδικοί» χρησιμοποιήθηκαν παιδιά από ένα σκακιστικό όμιλο με μέσο όρο ηλικίας 10.5, ενώ οι αρχάριοι ήσαν μεταπτυχιακοί φοιτητές και ερευνητές από ένα εκπαιδευτικό ερευνητικό κέντρο. Με τα πειράματα αυτά, η M. Chi είχε ως στόχο της να καταδείξει ότι η εμπειρία σε άλλους τομείς γνώσεις, καθώς και κάποιες γενικές στρατηγικές μάθησης που αποκτά κανείς με την πάροδο των χρόνων, δεν μπορούν να αναπληρώσουν την έλλειψη γνώσης σε ένα συγκεκριμένο τομέα. Τα συμπεράσματα της έρευνας ήταν σαφή, όσον αφορά στην υπεροχή της γνώσης. Τα παιδιά ξεπέρασαν σε επίδοση τους αρχαρίους. **Τα ευρήματα αυτά καταδεικνύουν, με σαφή τρόπο ότι η υψηλή επίδοση, σε ένα γνωστικό πεδίο οφείλεται σε μια καλα οργανωμένη γνώση του περιεχομένου και όχι στην κατοχή κάποιων γενικών στρατηγικών.**

Τα συμπεράσματα από τις έρευνες στο πεδίο των έμπειρων-αρχάριων στο σκάκι είναι άκρωςσυνεπή με τα συμπεράσματα ερευνών που διεξήχθησαν σε άλλα γνωστικά πεδία (Sweller & Cooper, 1985) . Ένα μεγάλο πλήθος ερευνών στη διδακτική των μαθηματικών (π.χ. Schoenfeld & Herrmann, 1982, Sweller & Cooper, 1985, Sweller, 1989 κ.ά.), αλλά και σε άλλα διαφορετικά γνωστικά πεδία ήλθε να ενισχύσει και να συμπληρώσει τα συμπεράσματα του deGroot.

Ο Ρόλος της Βραχύχρονης Μνήμης Στη Μάθηση

Έρευνες οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας έχουν δείξει ότι, προκειμένου οι πληροφορίες να γίνουν γνώση, πρέπει να προηγηθεί η επεξεργασία τους στην βραχύχρονη μνήμη. Πρακτικά, μπορεί κανείς να θεωρήσει τη βραχύχρονη μνήμη ως την ικανότητα του ανθρώπου να διατηρεί ενεργές, για σύντομο χρονικό διάστημα, έναν αριθμό πληροφοριών. Οι έρευνες συγκλίνουν στην άποψη ότι ο αριθμός των πληροφοριών τις οποίες μπορεί να επεξεργαστεί η βραχύχρονη μνήμη μια δεδομένη στιγμή είναι από 4 έως 7 «μονάδες πληροφορίας».

Ο ρόλος της βραχύχρονη μνήμης στη διαδικασία της μάθησης είναι καθοριστικός. Οι πληροφορίες εισέρχονται στη μνήμη αυτή, όπου και επεξεργάζονται (π.χ. δημιουργούνται νοηματικές συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων τμήματων της εισερχόμενης πληροφορίας) και στη συνέχεια εντυπώνονται στην μακρόχρονη μνήμη. Σε αντίθεση με την βραχύχρονη μνήμη η «χωρητικότητα» της μακρόχρονης μνήμης είναι θεωρητικά άπειρη.

Η ποιότητα της επεξεργασίας των πληροφοριών στη βραχύχρονη μνήμη συνδέεται άμεσα με την ικανότητα ανάκλησης της πληροφορίας, όσο βαθύτερη η επεξεργασία, τόσο πιο εύκολη είναι η ανάκτηση της συγκεκριμένης γνώσης.

Ένας εγγενής περιορισμός στην απόκτηση γνώσεων προέρχεται από την περιορισμένη ικανότητα της βραχύχρονης μνήμης να επεξεργαστεί μεγάλο πλήθος πληροφοριών. Στην περιορισμένη «χωρητικότητα» της βραχύχρονης μνήμης οφείλεται εν μέρει η αδυναμία των κλασικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (goal directed methods), όπως είναι η ανάλυση μέσων και σκοπών, να συνεισφέρουν στη μάθηση και κατ' επέκταση στην απόκτηση ειδίκευσης. Η ανάλυση μέσων και σκοπών βασίζεται στη χρήση ενδιάμεσων στόχων (υποσκοπών) που επιτρέπουν στον λύτη να «γεφυρώσει» σταδιακά την απόσταση του από το ζητούμενο. Η στρατηγική αυτή, ενώ είναι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος λύσης προβλημάτων, συνιστά μια πολύ αργή μέθοδο μάθησης, όπως έχουν δείξει σχετικές έρευνες (Sweller & Cooper, 1985, Sweller, 1989). Αυτό συμβαίνει γιατί η βραχύχρονη μνήμη «μπλοκάρεται» με στοιχεία που αφορούν στην επίτευξη του στόχου και των ενδιάμεσων υποσκοπών του συγκεκριμένου προβλήματος, και όχι με στοιχεία τα οποία αφορούν τη δομή της ύλης, της οποίας η μάθηση επιδιώκεται με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Όπως επισημαίνει ο Cooper (1998) ο χρήστης της ανάλυσης μέσων και σκοπών μπορεί να λύσει πολλά προβλήματα, αλλά στην πραγματικότητα να αποκομίσει ελάχιστες γνώσεις για την ύλη στην οποία αναφέρονται τα προβλήματα αυτά.

ΙΙΙ. Σχεδιάζοντας Διδακτικά Εργαλεία με Βάση τη Γνωστική Ψυχολογία

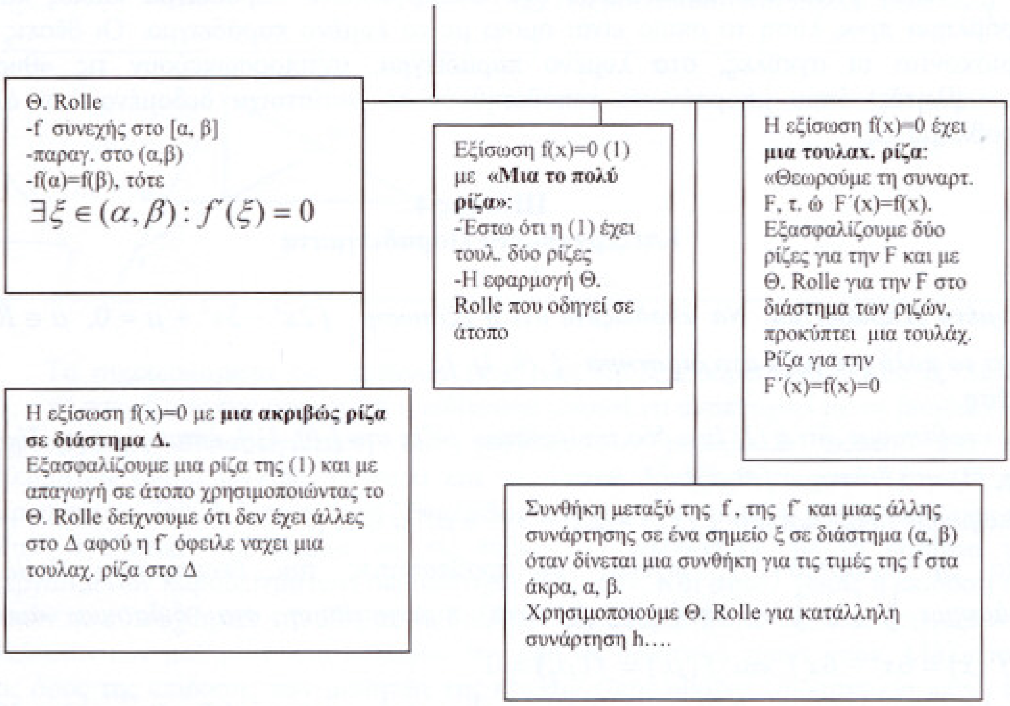
Νοητικά Σχήματα

Οι έρευνες στη γνωστική ψυχολογία έδειξαν ότι η ανάπτυξη ειδίκευσης σε ένα τομέα γνώσεων βασίζεται σε δύο στοιχεία: (α) στην απόκτηση και κατοχή «νοητικών σχημάτων» και (β) στην αυτοματοποίηση των διαδικασιών ή των κανόνων που κατέχει κάποιος. Έτσι, αφού η ειδίκευση βασίζεται σε μια πλούσια «βάση δεδομένων» που αποτελείται από νοητικά «σχήματα» είναι σκόπιμο, πριν προχωρήσουμε, να εξετάσουμε την έννοια του νοητικού «σχήματος».

Τα (νοητικά) «σχήματα» είναι δομές γνώσης τις οποίες ανακαλούμε προκειμένου να αντιμετωπίσουμε μια κατάσταση ή ένα πρόβλημα. Τα «σχήματα» περιέχουν «θυρίδες» (θέσεις μεταβλητών) οι οποίες συμπληρώνονται από τα δεδομένα του προβλήματος ή της κατάστασεις που αντιμετωπίζουμε. Το πόσο πλούσιο σε πληροφορίες είναι ένα «σχήμα» είναι σε άμεση συνάρτηση με το επίπεδο εμπειρίας και ειδίκευσης του ατόμου που κατέχει το «σχήμα αυτό». Όσο πιο έμπειρο είναι ένα άτομο σε ένα τομέα γνώσης, τόσο πιο πλούσιο είναι ένα σχετικό «σχήμα» σε αποθηκευμένες πληροφορίες. Το «σχήμα» περιέχει γενικές γνώσεις, χρήσιμες για την αναγνώριση των καταστάσεων όπου αυτό μπορεί να εύρει εφαρμογή, αλλά και γνώσεις που του επιτρέπουν να εκτελεί διαδικασίες (γνώσεις 'know-how'). Στον Πίνακα 3 εμφανίζεται ένα νοητικό «σχήμα» αναφορικά με το θεώρημα Rolle.

Πίνακας 3

Παράδειγμα Δομής Σχήματος Αναφορικά με το Θεώρημα Rolle : Ένα Επιμέρους Τμήμα



Το ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό είναι: «Εάν η ειδίκευση βασίζεται στην κατοχή κατάλληλων ΄νοητικών σχημάτων', πως αποκτώνται τα ΄σχήματα' αυτά και πως επιτυγχάνεται, με αποδοτικό τρόπο, η αυτοματοποίηση των κανόνων και των διαδικασιών;».

Προς την κατεύθυνση αυτή και ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία, έχει αναπτυχθεί από κάποιους ερευνητές (Cooper & Sweller, 1985; Zhu & Simon, 1987; Sweller, 1989; κ. ά.) ένας αριθμός από διδακτικά μέσα . Τα κυριώτερα από αυτά τα διδακτικά μέσα είναι: (α) τα επεξεργασμένα παραδείγματα (worked examples) (β) Η συμπλήρωση λύσης προβλήματος (problem completion)και (γ) τα προβλήματα μειωμένου σκοπού (reduced goal specificity problems). Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα επεξεργασμένα παραδείγματα και στα προβλήματα μειωμένου σκοπού, με τη βοήθεια παραδειγμάτων.

Επεξεργασμένα Παραδείγματα και Προβλήματα Μειωμένου Σκοπού

Τα επεξεργασμένα παραδείγματα δεν είναι κάτι καινούργιο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από πολύ παλαιότερα (π.χ. John Dewey) έχουν συνδεθεί με τη μάθηση μέσω της δραστηριοποίησης του μαθητή (learning-by-doing). Ωστόσο, μόνο πρόσφατα εξετάστηκαν οι προϋποθέσεις υπό τις οποίες η διδασκαλία με τη βοήθεια επεξεργασμένων παραδειγμάτων μπορεί να καταστεί ιδιαίτερα αποδοτική. Τα παραδείγματα αυτά πρέπει να είναι πολύ «λιτά» ως προς τα βήματα που απαιτούνται για τη λύση τους, δηλαδή να είναι όσο το δυνατόν πιο σύντομα περιλαμβάνοντας μόνο τα απολύτως απαραίτητα λογικά βήματα, χωρίς πλεονασμούς. Έτσι, αν επεξηγηθεί στους μαθητές ένα παράδειγμα και στη συνέχεια τους ζητηθεί να λύσουν ίδιου τύπου προβλήματα, τότε οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα:

(α) να αναγνωρίζουν ως ιδιαίτερη κατηγορία (νοητικό «σχήμα») τον τύπο των συγκεκριμένων προβλημάτων

(β) να ανακαλούν εύκολα και γρήγορα τα βήματα που απαιτούνται για τη λύση και

(γ) να εκτελούν τα βήματα αυτά χωρίς λάθη.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζει ένα επεξεργασμένο παράδειγμα καθώς και ενα πρόβλημα προς λύση το οποίο είναι όμοιο με το λυμένο παράδειγμα. Οι θέσεις όπου βρίσκονται οι αγκύλες, στο λυμένο παράδειγμα, αντιπροσωπεύουν τις «θυρίδες» (μεταβλητές) όπου μπορούν να τοποθετηθούν τα αντίστοιχα δεδομένα του άλυτου προβλήματος.

Πίνακας 4
Επεξεργασμένα Παραδείγματα

Λυμένο Παράδειγμα. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $[2x^3 - 3x^2 + \mu = 0,\ \mu \in R]$ ***(1) έχει το πολύ μιά ρίζα στο διάστημα [(0, 1)].***

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η (1) έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο [(0, 1)], έστω $\rho_1 < \rho_2$ *δύο ρίζες της (1) στο διάστημα [(0, 1)].*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $[f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \mu,\ \mu \in R]$.

Για τη συνάρτηση f *ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα* $[\rho_1,\ \rho_2]$, *αφού η* f *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με* $[f'(x) = 6x^2 - 6x]$ *και* $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

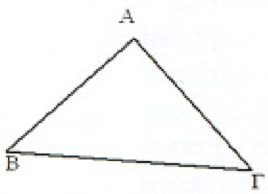
Από το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\ \rho_2]$, *υπάρχει* $[\xi \in (\rho_1,\ \rho_2) \subset (0, 1)]$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi) = 0$. *Αυτό όμως είναι άτοπο διότι η* $f'(x) = 0$ *δεν έχει ρίζα στο* $\xi \in (\rho_1,\ \rho_2)$ *, άρα και στο [(0, 1)], αφού* $[f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1]$.

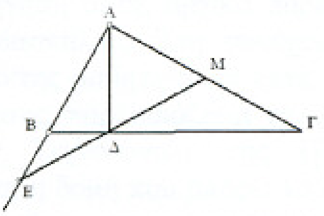
Παράδειγμα προς Λύση: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $[x^3 - 3x^2 + \eta\mu\theta = 0,\ \theta \in R]$ ***(1) έχει το πολύ μιά ρίζα στο διάστημα [(0, 2)].***

Ένα εναλλακτικό διδακτικό μέσο για την ανάπτυξη ειδίκευσης στα μαθηματικά αποτελούν τα προβλήματα «μειωμένου σκοπού» (reduced goal specificity problems). Στον Πίνακα54 εμφανίζονται δύο προβλήματα.

Πίνακας 5
Προβλήματα Μειωμένου Σκοπού

Πρόβλημα 1	***Πρόβλημα 2***
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ=ΑΓ) και έστω ότι γωνία Α=φ. Να εκφάσετε τη γωνία Β συναρτήσει της φ.	*Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Β=2Γ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΕΒ=ΒΔ. Η προέκταση της ΕΔ τέμνει την ΑΓ στο Μ. Αν Γ=φ, τότε:* *(α) Να εκφράσετε όσες πιο πολλές γωνίες μπορείτε συναρτήσει της φ.* *(β) Να βρείτε όσο πιο πολλά ισοσκελή τρίγωνα μπορείτε.*





Τα συμπεράσματα των ερευνών (π.χ. Sweller & Cooper 1985; Zhu & Simon, 1987; κ.ά) στηρίζουν την άποψη ότι η ειδίκευση μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια των επεξεργασμένων παραδειγμάτων, των προβλημάτων μειωμένου σκοπού και των προβλημάτων συμπλήρωσης, γρήγορα και αποδοτικά. Ιδιαίτερα τα αποτελέσματα από την έρευνα των Zhu & Simon (1987) υπήρξαν εντυπωσιακά, αφού η ύλη τριών ετών στο κινέζικο αναλυτικό πρόγραμμα για τις τάξεις 5-7 καλύφθηκε, με τη βοήθεια των επεξεργασμένων παραδειγμάτων, σε διάστημα δύο ετών. Και αυτό, χωρίς η επίδοση των μαθητών που διδάχθηκαν την ύλη με τη βοήθεια των επεξεργασμένων παραδειγμάτων να υπολείπεται των μαθητών που κάλυψαν την ύλη σε διάστημα τριών ετών. Μάλιστα, ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών της πειραματικής ομάδας (διδασκαλία μεσω των επεξεργασμένων παραδειγμάτων) ήταν λίγο μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο της ομάδας ελέγχου (κάλυψη της ύλης με τον παροδοσιακό τρόπο).

Από όλα όσα έχουν εκτεθεί στα προηγούμενα, ίσως, δημιουργηθεί η αίσθηση ότι ο ρόλος του δασκάλου περιθωριοποιείται με τις μεθόδους αυτές. Όμως, αυτή η αίσθηση είναι πέρα για πέρα εσφαλμένη, αφού ένα πολύ σημαντικό μέρος της διδασκαλίας για την απόκτηση των νοητικών «σχημάτων» δεν έχει συζητηθεί στην προκειμένη εργασία. Αυτό το κομμάτι της διδασκαλίας το οποίο αφορά στη γνώση τη σχετική με το πότε ένα σχήμα πρέπει να εφαρμοσθεί, απαιτεί ευρηματικότητα και δημιουργικότητα από μέρους του δασκάλου. Ο οποίος, ανεξάρτητα από το τι μέρος της ύλης διδάσκεται, πρέπει νά είναι πάντα παρών να εξηγεί, να λύνει απορίες και να παρακινεί, συντελώντας, με τους μαθητές του, στη δημιουργία ενός κλίματος επικοινωνίας βαθειά ανθρώπινης και δημιουργικής.

Βιβλιογραφία

Cooper, G. Research into Cognitive Load Theory and Instructional Design at UNSW.http//www.g.cooper@unsw.edu.au. 1998.

Cooper, G. & Sweller, J. Effects of Schema Acquisition and Rule Automation on Mathematical Problems-Solving Transfer. *In Journal of Educational Psychology*. Vol. 79, No. 4, 347-362. 1987.

Chase W. G. & Simon, H. A. The Mind's Eye in Chess. In ChaseW. G. (Ed.). *Visual Information Processing*. New York:Academic Press. 1973.

Chi, M. T. H. Knowledge Structures and Memory Development. In Siegler, R (Ed.) *Children's Thinking: What Develops?*. Hillsdale: LEA. 1978.

DeGroot, A. *Thought and Choice in Chess*. The Hague:Mouton. 1965

Polya, G. *How to Solve It.*Princeton University Press.New Jersey. 1973

Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press. 1985

Snow, R. E.& Yallow, E. Education and Intelligence. In Sternberg, R. J. (Ed.) *Handbook of Human Intelligence*. Cambridge Massachusetts:Cambridge University Press.1982.

Sweller, J & Cooper, G. A. The use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *In Cognition & Instruction*. vol. 2. p 59-89. LEA.1985

Sweller, J. Cognitive Technology: Some Procedures for Facilitating Learning and Problem Solving in Mathematics and Science. *Journal of Educational Psychology*. V. 81, 457-466. 1989

Zhu, Xinming & Simon, H. A. Learning Mathematics From Examples and by Doing. *Cognition and Instruction*. 4(3), 37-166. 1987.