Παράδειγμα / Εφαρμογή / Άσκηση

Ένα κομμάτι ατσαλιού έχει μάζα 40g και έχει όγκο 5cm^3.
Α)Πόση είναι η πυκνότητα τού ατσαλιού;
Β)Πόση μάζα θα έχει ένα κομμάτι ατσαλιού που έχει όγκο 1cm^3;
Γ)Πόση μάζα θα έχει ένα κομμάτι ατσαλιού που έχει όγκο 20cm^3;
Δ)Πόσο όγκο θα έχει ένα κομμάτι ατσαλιού που έχει μάζα 120g;
Απαντήσεις:

Α) $\text{Πυκνότητα} = \dfrac{\text{Μάζα}}{\text{Όγκος}}$ ή $d = \dfrac{m}{V} = \dfrac{40\,g}{5\,cm^3} = \dfrac{40}{5}\dfrac{g}{cm^3} = 8\dfrac{g}{cm^3}$

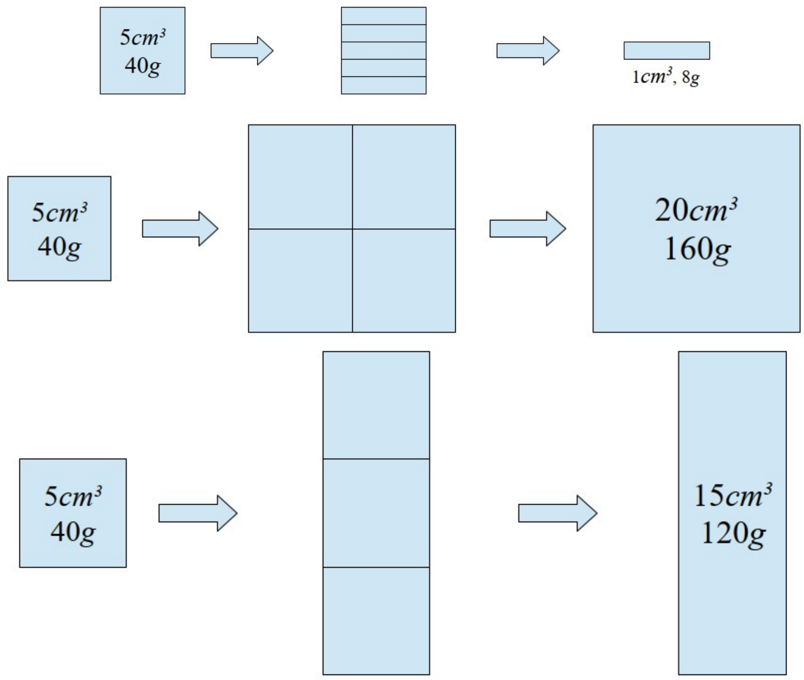
Άρα η απάντηση στο υποερώτημα αυτό είναι:
“Το ατσάλι έχει πυκνότητα 8 γραμμάρια ανά κυβικό εκατοστό”

Β)Η απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα ήταν:
“Το ατσάλι έχει πυκνότητα 8 γραμμάρια ανά κυβικό εκατοστό”
που σημαίνει:
“Το κάθε κυβικό εκατοστό ατσαλιού ζυγίζει 8 γραμμάρια!”
ή αλλιώς,
“Το ένα κυβικό εκατοστό ατσαλιού ζυγίζει 8 γραμμάρια!”
Άρα 1cm^3 ατσαλιού έχει μάζα 8g!

Γ)Αφού 1cm^3 ατσαλιού ζυγίζει 8g
τότε τα 20cm^3 ατσαλιού θα ζυγίζουν 20 φορές περισσότερο
δηλαδή 20·8=160g!
Αυτό συμβαίνει επειδή η πυκνότητα τού ατσαλιού είναι σταθερή, δηλαδή ο λόγος τής μάζας διά τον όγκο ενός κομματιού ατσαλιού είναι πάντα σταθερός και, επομένως,
η μάζα ενός κομματιού είναι **ανάλογη** με τον όγκο τού κομματιού!

Δ)Ξανά, επειδή η πυκνότητα τού ατσαλιού είναι σταθερή,
και τα φυσικά μεγέθη μάζα και όγκος είναι **ανάλογα**:
Το 1cm^3 ατσαλιού ζυγίζει 8g
Τα Xcm^3 ατσαλιού θα ζυγίζουν 120g
(Εφαρμόζουμε την απλή μέθοδο των τριών και βρίσκουμε...)

$$X = 1 \cdot \frac{120}{8} = 15$$



ΠΡΟΣΟΧΗ! Όποιος μαθητής/μαθήτρια δε θυμάται τα **ανάλογα ποσά** και την **απλή μέθοδο των τριών**, να ανατρέξει οπωσδήποτε στο βιβλίο των Μαθηματικών του/της, τής ΣΤ' Δημοτικού, στα Κεφάλαια 30-39 και να τα ξαναδεί προσεκτικά! Εναλλακτικά, μπορεί να επισκεφτεί τις σελίδες αυτές στο Ψηφιακό Σχολείο, π.χ. στην ηλεκτρονική διεύθυνση: http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2186/Mathimatika_ST-Dimotikou_html-empl/index3_30.html

Λόγος

Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται **λόγος.** Το κλάσμα αυτό έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

Παραδείγματα

Ο πύργος του Άιφελ έχει ύψος περίπου 300 μέτρα, ενώ ο Λευκός Πύργος περίπου 30 μέτρα.

Ο λόγος των υψών τους είναι $\frac{300}{30}$ ή $\frac{30}{3}$ ή 10.

(Δηλαδή ο πρώτος είναι 10 φορές ψηλότερος.)

Αναλογία

Όταν συγκρίνοντας δύο λόγους διαπιστώσουμε ότι είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι αποτελούν μια **αναλογία.**

Παραδείγματα

Οι λόγοι $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ σχηματίζουν αναλογία γιατί

είναι ίσοι $\left(\frac{1}{5} = \frac{2}{10}\right)$

Για να σχηματίσω αναλογία από έναν λόγο, αρκεί να φτιάξω έναν άλλο λόγο που να είναι ίσος με τον πρώτο, όπως στα κλάσματα (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δύο όρους με κάποιον αριθμό).

Σταυρωτά γινόμενα

Πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Τα γινόμενα αυτά λέγονται **σταυρωτά γινόμενα.**

Παραδείγματα

Στην αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ τα σταυρωτά γινόμενα

είναι: $4 \cdot 3 = 12$
$6 \cdot 2 = 12$

Ανάλογα ποσά

Δύο **ποσά** είναι **ανάλογα,** όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό.

Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός.

Παραδείγματα

Η αξία ενός υφάσματος είναι ανάλογη προς το μήκος του.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	1	2	3	4
Αξία υφάσματος σε €	5	10	15	20

Οι λόγοι τους είναι ίσοι: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά ανάλογα βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με διαίρεση) και στη συνέχεια βρίσκω την άγνωστη τιμή (με πολλαπλασιασμό) λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Παραδείγματα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30€. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα ύφασμα;

Λύση

Τα 5 μέτρα κοστίζουν 30 €

Το 1 μέτρο κοστίζει 30 : 5 = 6 €

Τα 12 μέτρα κοστίζουν 12 · 6 = 72 €

β) Σχηματίζοντας την αναλογία

Εργάζομαι ως εξής:

- Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- Εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα.
- Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- Σχηματίζω την αναλογία.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο της αναλογίας λύνοντας την εξίσωση.

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 € Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα;

Λύση

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	5	12
Αξία σε €	30	x

Τα ποσά μήκος υφάσματος και αξία είναι ανάλογα ποσά (το διπλάσιο μήκος έχει διπλάσια αξία).

Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι.

Σχηματίζω την αναλογία και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$\frac{5}{30} = \frac{12}{x}$ Άρα 5 · x = 30 · 12 επομένως 5 · x = 360

Άρα x = 360 : 5 x = 72

Εφαρμογή

Ένας αμπελουργός έκανε 600 κιλά κρασί από 1.800 κιλά σταφύλια. Την επόμενη χρονιά έκανε 800 κιλά κρασί. Πόσα κιλά σταφύλια είχε τη δεύτερη χρονιά;

Λύση:

α) Με αναγωγή στη μονάδα : Τα 600 κιλά κρασί γίνονται από .... κιλά σταφύλια

Το 1 κιλό κρασί γίνεται από 1.800 : 600 = ... κιλά σταφύλια

Τα 800 κιλά κρασί γίνονται από 800 · ..... = ... κιλά σταφύλια

β) Με αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Βάρος κρασιού σε κιλά	600	800
Βάρος σταφυλιών σε κιλά	1.800	x

Σχηματίζω την αναλογία και εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $\frac{600}{1.800} = \frac{800}{x}$

Σχηματίζω την εξίσωση: 600 · x = 1.800 · 800

και τη λύνω 600 · x = 1.440.000 x = ... Άρα x = ...

Απάντηση: Τη δεύτερη χρονιά είχε .... κιλά σταφύλια.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Αντιστρόφως ανάλογα ή **αντίστροφα** λέγονται δύο ποσά, στα οποία, όταν πολλαπλασιάζεται η τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.
Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό.

Παραδείγματα

Ο αριθμός των εργατών είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τις ημέρες εργασίας για ένα συγκεκριμένο έργο.

Αριθμός εργατών	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

Τα αντίστοιχα γινόμενά τους είναι ίσα:
$1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά αντιστρόφως ανάλογα, βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με πολλαπλασιασμό) και στη συνέχεια διαιρώντας βρίσκω την άγνωστη τιμή, λέγεται **αναγωγή στη μονάδα.**

Παραδείγματα

Οι 3 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Σε πόσες ημέρες τελειώνουν το ίδιο έργο οι 10 εργάτες;

Λύση

Οι 3 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 20 ημέρες.
Ο 1 εργάτης τελειώνει το έργο σε $20 \cdot 3 = 60$ ημέρες
Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε $60 : 10 = 6$ ημέρες

β) Σχηματίζοντας πίνακα ποσών και τιμών

Εργάζομαι ως εξής:

- Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- Εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.
- Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- Σχηματίζω την εξίσωση που δημιουργείται από τα ίσα γινόμενα των τιμών.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο, λύνοντας την εξίσωση.

Στο προηγούμενο παράδειγμα εργαζόμαστε με πίνακα.
Φτιάχνουμε τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός εργατών	3	10
Ημέρες εργασίας	20	x

Τα ποσά **αριθμός εργατών** και **ημέρες εργασίας** είναι **αντιστρόφως ανάλογα** (ο διπλάσιος αριθμός εργατών τελειώνει το έργο στις μισές μέρες).
Άρα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα.
Σχηματίζω τα γινόμενα και βρίσκω τον άγνωστο όρο.
$10 \cdot x = 20 \cdot 3$
$10 \cdot x = 60$ επομένως $x = 60 : 10$ **Άρα $x = 6$ ημέρες**

Εφαρμογή

Τα 12 λεωφορεία για τη μεταφορά των μαθητών κάνουν 2 δρομολόγια. Τα 4 λεωφορεία χάλασαν. Πόσα δρομολόγια θα κάνουν τα 8 λεωφορεία που έμειναν;

Λύση:

α) με αναγωγή στη μονάδα: Τα 12 λεωφορεία κάνουν 2 δρομολόγια
Το 1 λεωφορείο θα έκανε $12 \cdot 2 = 24$ δρομολόγια
Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν $24 : 8 = 3$ δρομολόγια

β) με πίνακα τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός λεωφορείων	12	8
Δρομολόγια	2	x

Σχηματίζω την εξίσωση των ίσων γινόμενων: $8 \cdot x = 12 \cdot 2$
και τη λύνω $8 \cdot x = 24$ επομένως x = ... Άρα x = ...

Απάντηση: Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν ..... δρομολόγια.