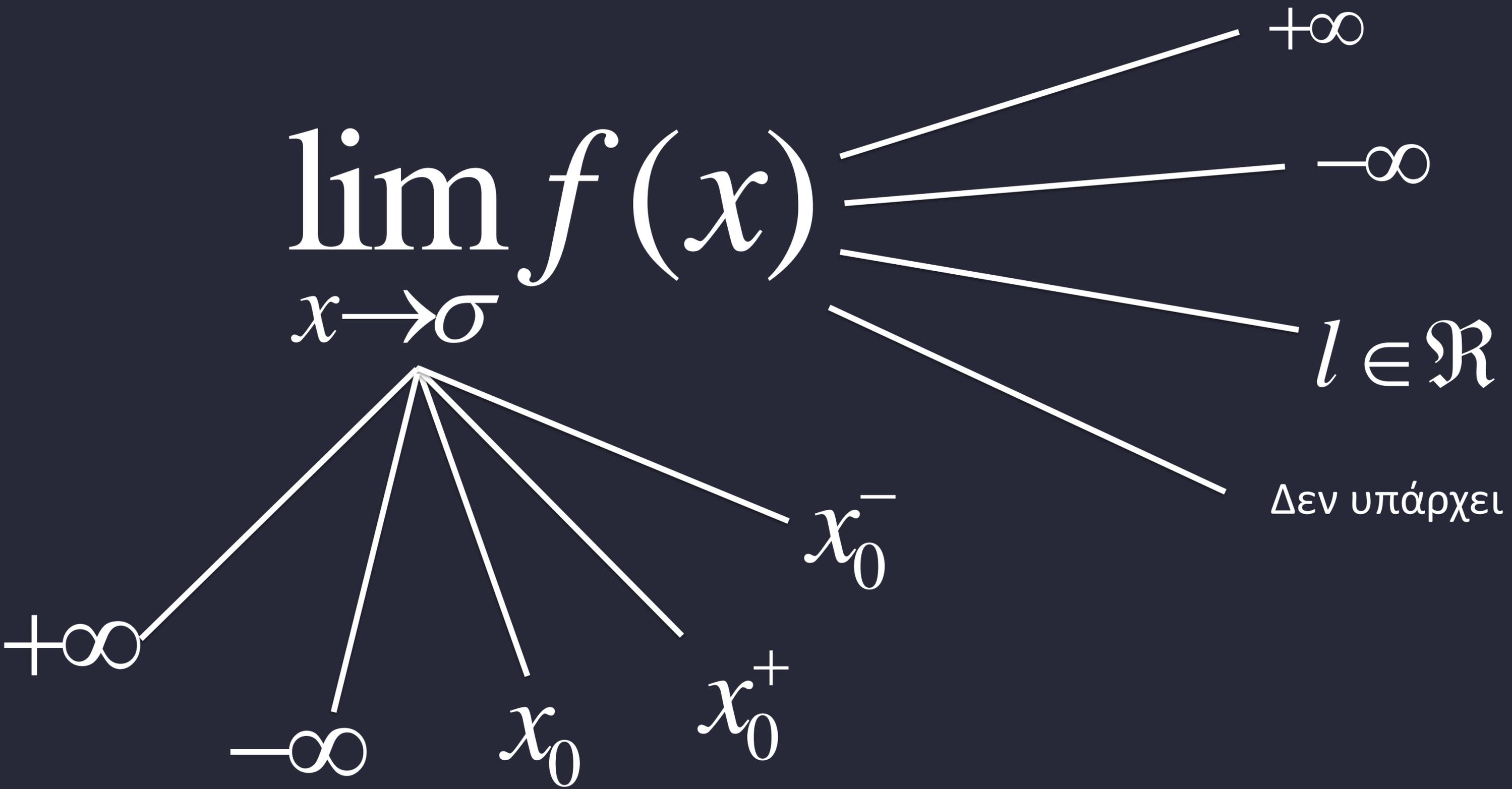


Το όριο στις Πανελλαδικές  
και στο σχολικό βιβλίο



$$\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x)$$



Κριτήριο  
παρεμβολής

Κανόνας  
D' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x)$$

Όριο σύνθεσης

Μονοτονία και  
Κυρτότητα

Θεώρημα Μέσης  
Τιμής

# Πράξεις με το $\infty$

$$\alpha + \infty = \infty$$

$$\alpha \neq -\infty$$

$$\alpha(\infty) = \infty$$

$$\alpha \neq 0$$

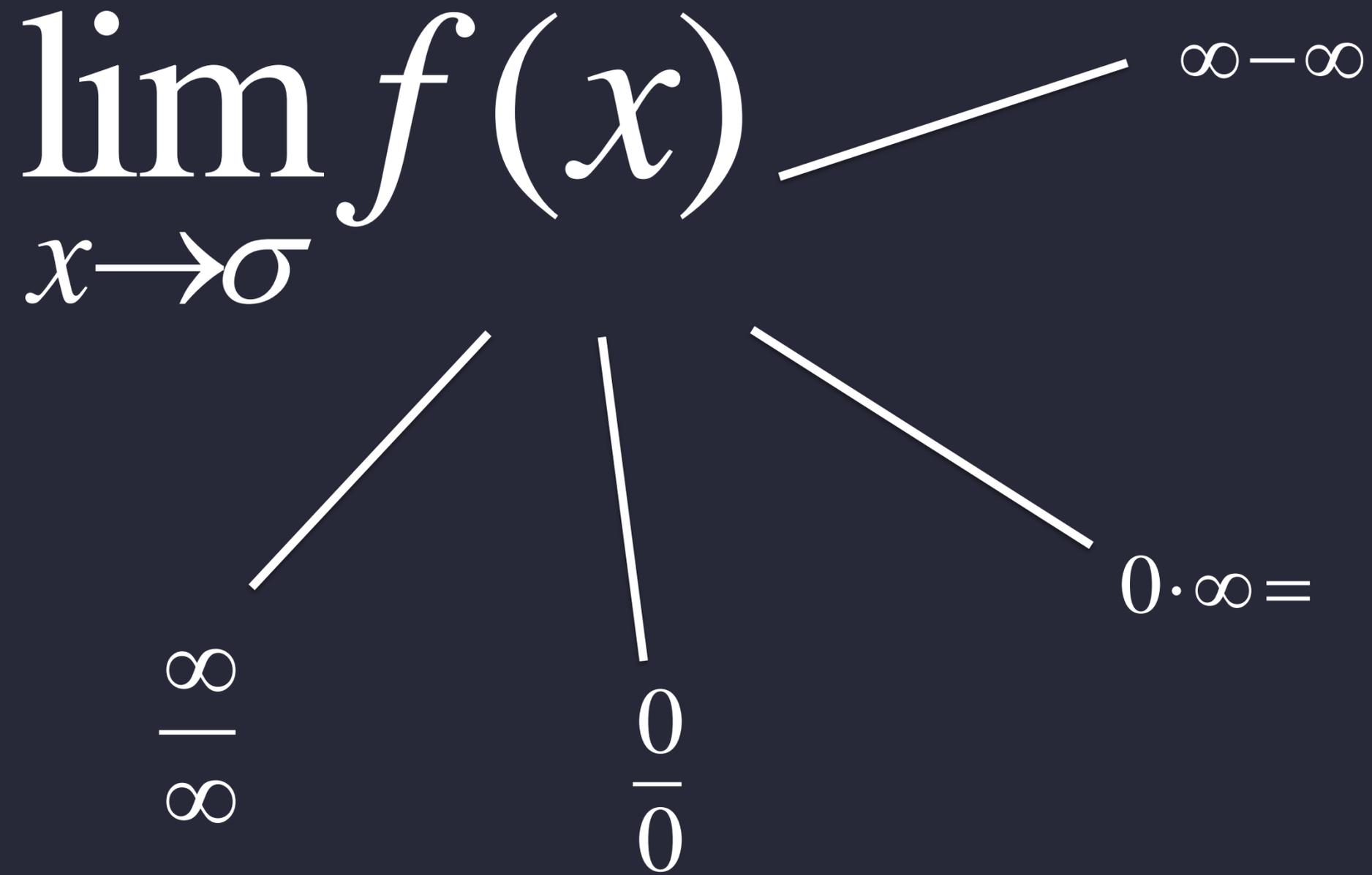
$$\frac{\alpha}{\infty} = 0$$

$$\alpha \neq \infty$$

$$\frac{\alpha}{0} = \infty$$

$$\alpha \neq 0$$

# Απροσδιόριστες μορφές



# Βασικά όρια

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\varphi x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

## Άσκηση 7 σελίδα 122

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x f(x) - e^a f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a} && \phi(x) = e^x f(x) \\ &= e^a f(a) + e^a f'(a)\end{aligned}$$

## Προτεινόμενα θέματα

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x \sigma\nu\nu x f(x) - e^a \sigma\nu\nu a f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - a} && \phi(x) = e^x \sigma\nu\nu x f(x) \\ &= e^a \sigma\nu\nu a f(a) - e^a \eta\mu a f(a) + e^a \sigma\nu\nu a f'(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x f(g(x)) - e^a f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a} && \phi(x) = e^x f(g(x)) \\ &= e^a f(g(a)) + e^a f'(g(a)) g'(a)\end{aligned}$$

## Άσκηση 6 σελίδα 168

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-x}) \ln x = (1 - 1)(+\infty) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(1 - e^{-x})}{x} x \ln x \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - e^{-x})}{x} &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^u}{-u} && u = -x \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u - 1}{u} && \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0^- \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

# Βασικά όρια

 $\infty$  $—$  $\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\nu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{x} \right)^\nu = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{x} \right) \stackrel{\infty}{=} \frac{1}{\nu} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\nu}x} = +\infty$$

# Βασικά όρια

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu}{\ln x} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\nu x^{\nu-1}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \nu x^\nu = +\infty \\ &= +\infty\end{aligned}$$

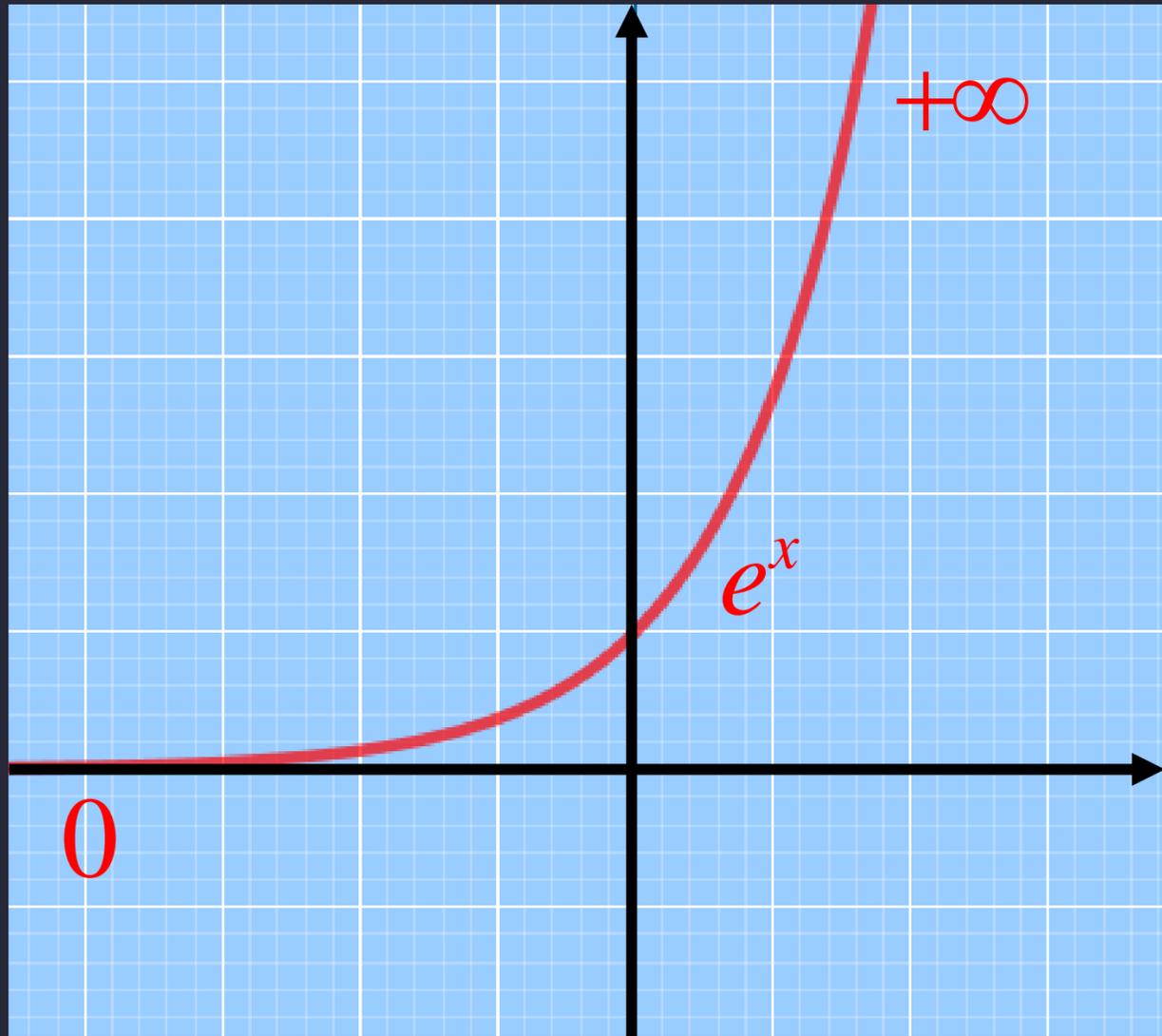
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x e^x \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\nu} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

# Εκθετικά όρια



$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0$$

$0^0$ 

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\ln x \ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

Εκθετικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{x-1}{-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln^2 x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln^2 x + 2 \ln x) = 0$$

$1^\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\sigma\phi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sigma\phi x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

Εκθετικά όρια

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\phi x \ln(1+x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\varepsilon\phi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \end{aligned}$$

$\infty^0$

Εκθετικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1+ax} = 0$$

# Θεώρημα Μέσης τιμής

$$a < \beta \quad [f(x + \beta) - f(x + a)] = f'(\xi_x)(\beta - a)$$

$$x + a \leq \xi_x \leq x + \beta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \xi_x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \beta) - f(x + a)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi_x)(\beta - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)(\beta - a) \end{aligned}$$

Εφαρμογή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x-1}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x}})' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

# Μονοτονία και κυρτότητα

$$f'(x) > 0 \quad x \in (a, +\infty)$$

$$f''(x) > 0$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) < 0 \quad x \in (-\infty, a)$$

$$f''(x) < 0$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

## Μονοτονία και κυρτότητα

$$f''(x) = e^{\eta\mu x + 2x} (\sigma\upsilon\nu x + 2) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^{\eta\mu x + 2x} (\sigma\upsilon\nu x + 2) \Rightarrow f'(x) = e^{\eta\mu x + 2x} + c$$
$$f'(0) = 1 \Rightarrow 1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$$

$$f'(x) = e^{\eta\mu x + 2x} > 0$$
$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

1. Ιδιότητες των ορίων (σελ. 48)
2. Κριτήριο παρεμβολής (σελ.51)

**ΖΗΤΗΜΑ 4ο**

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι συναρτήσεις συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x) - g(x) = x - 4, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -7$$

α) Να βρείτε τα όρια : i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  και

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{x f(x) - 3x^2 + 1}$

$$f(x) - g(x) = x - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$$

$$f(x) - g(x) = x - 4$$

$$g(x) = -f(x) - (x - 4)$$

$$g(x) = -f(x) - (x - 4)$$

$$\frac{g(x)}{x} = -\frac{f(x)}{x} - \frac{(x-4)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-4)}{x}$$

$$= -3 - 1 = -4$$

## Κριτήριο παρεμβολής

$$-1 \leq \eta \mu 2x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} \eta \mu 2x \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu 2x}{x} = 0$$

## Μηδενική επί φραγμένη

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} \varphi(x) f(x) = 0$$

$$m \leq \varphi(x) \leq M$$

$$mf(x) \leq \varphi(x) f(x) \leq Mf(x)$$

$$Mf(x) \leq \varphi(x) f(x) \leq mf(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} mf(x) = \lim_{x \rightarrow \sigma} Mf(x) = 0$$

## Κριτήριο Παρεμβολής

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} g(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} g(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = -\infty$$

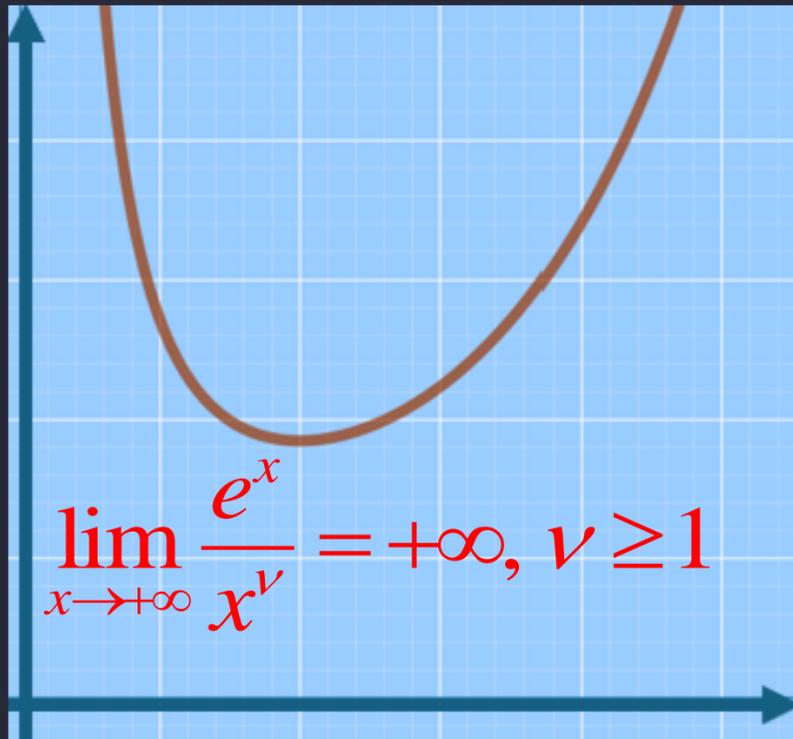
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

### ΘΕΜΑ 4ο

δ. Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

$$f(x) = e^x - (x + 1).$$

**Μονάδες 6**



$$f(x) = e^x - (x + 1).$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

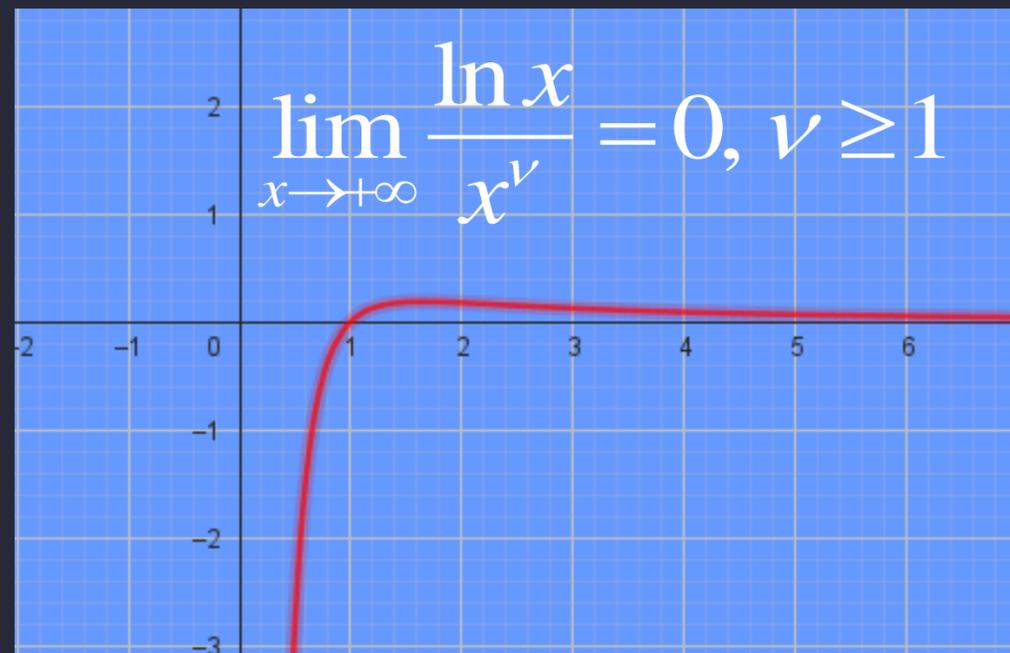
$$f(x) = \cancel{e^x} \left( 1 - \frac{x}{\cancel{e^x}} + \frac{1}{\cancel{e^x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$\begin{matrix} +\infty & 0 & 0 \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \end{matrix}$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} - (-\infty + 1) = +\infty$$

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ  
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)



## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$  **Μονάδες 9**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\nu} = 0, \nu \geq 1$$

$$\frac{1 + x \ln x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{1 + x \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\nu} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x \ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\nu} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\nu x^{\nu-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu x^\nu}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Ιδιότητες των ορίων (σελ. 48)

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

β. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Μονάδες 2

δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Μονάδες 2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$D_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x) + g(x) = 1$$

$$D_{f+g} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x)g(x) = 0$$

$$D_{f+g} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βοηθητική συνάρτηση  
ασκ. 4 σελίδα 58

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i.  $f(0) = 0$

ii.  $f'(0) = 1$ .

**Μονάδες 4**

**Μονάδες 4**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

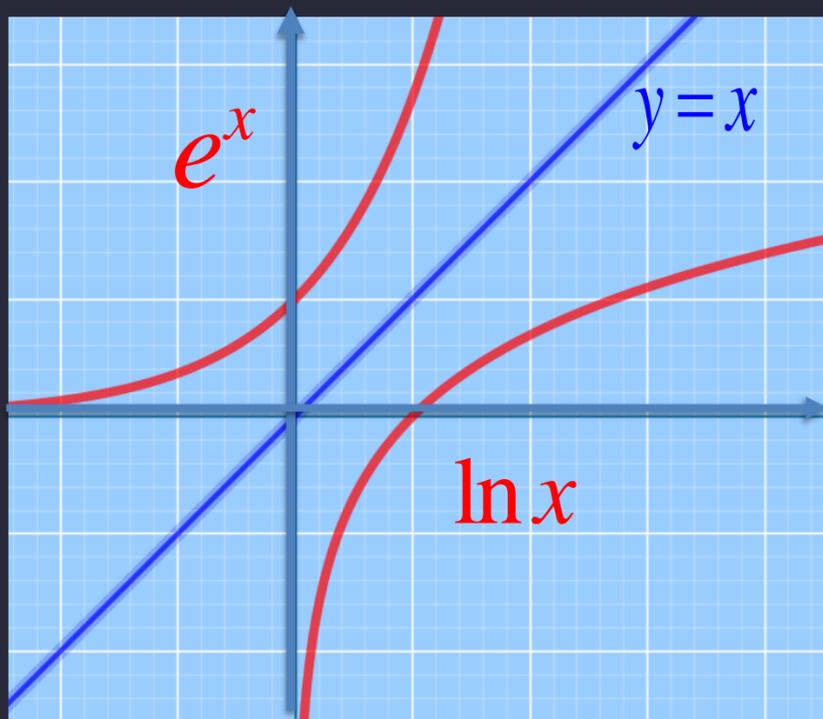
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - x}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 \varphi(x) + x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot 2005 + 0 = 0$$

$$x\varphi(x) = \frac{f(x) - x}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1$$

$$\frac{f(x)}{x} = x\varphi(x) + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot 2005 + 1 = 1$$

## Βασικά όρια



### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \ln x + e^x, \quad x \in (1, +\infty).$$

β) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

**Μονάδες 6**

$$f(x) = x - \ln x + e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

$$f(x) = e^x \left( \frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x} + 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty(0 + 0 + 1) = +\infty$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Κριτήριο παρεμβολής  
(Μηδενική)(Φραγμένη)

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

δ. Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$  .  $E(\lambda) = \frac{e^{-2}}{2\lambda}$

Μονάδες 7

$$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2(e-2)}{(2 + \eta\mu\lambda)2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e-2)}{(2 + \eta\mu\lambda) \frac{1}{\lambda}}$$

$$-\frac{3}{\lambda} \leq (2 + \eta\mu\lambda) \frac{1}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda}$$

$$-\frac{3}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{3}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 4ο

β. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

$0 \cdot (+\infty)$

Μονάδες 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \left(\ln 1 + \frac{1}{+\infty}\right) = (+\infty) \cdot 0 = \frac{0}{\frac{1}{+\infty}} = \frac{0}{0}$$

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \sim \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^v} = +\infty, v \geq 1$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

### ΘΕΜΑ 4ο

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$ .

$$I(x) = e^x - \frac{1}{3e^{3x}} - \frac{2}{3} \quad \text{Μονάδες 5}$$

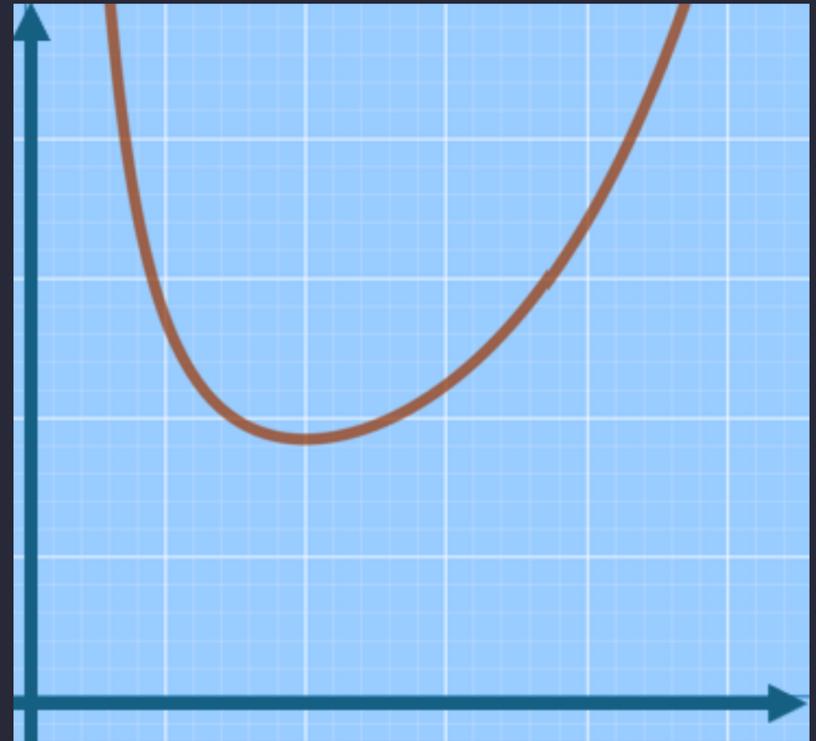
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$$

$$I(x) = e^x - \frac{1}{3e^{3x}} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{I(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{3x^2 e^{3x}} - \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^v} = +\infty, v \geq 1$$

$$\frac{I(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty - \frac{1}{+\infty} - \frac{2}{3} = +\infty - 0 - \frac{2}{3} = +\infty$$



ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Αλλαγή μεταβλητής  
(όριο σύνθεσης)

$$f(0) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0)\eta\mu x^4 2x}{x^4}$$

Μονάδες 7

$$f(0) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0)\eta\mu x^4 2x}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x^4}{x^4} \stackrel{x^4=u}{=} \lim_{\substack{x^4=0 \\ x \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\frac{f(0)\eta\mu x^4 2x}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0) \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Αλλαγή μεταβλητής  
(όριο σύνθεσης)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0. \end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ .

Μονάδες 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$$

# Αλλαγή μεταβλητής Κανόνας D' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$g'(x_0) \neq 0$$

## ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

**Μονάδες 4**

γ. Αν για τη συνάρτηση  $f$  του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και  $g(0) = g'(0) = 1$ , τότε

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

ι. να αποδείξετε ότι  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

**Μονάδες 10**

# Αλλαγή μεταβλητής

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} &\stackrel{h=-u}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} \\ &= g''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} &= \frac{-g''(x-0)(-1)}{1} \\ &= g''(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\sim} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} \xrightarrow{x \rightarrow h} \frac{g''(x+0)(1) - g''(x-0)(-1)}{2 \cdot 1} = g''(x)$$

$$\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\sim} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + (g'(x) - g'(x-h))}{h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g'(x) - g'(x-h))}{h} = g''(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0 - 0)(-1)}{1} = -f'(x_0) \quad \text{ασκ. 8 i) σελ. 103}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0 + 0)(1) - f'(x_0 - 0)(-1) = 2f'(x_0) \quad \text{ασκ. 8 ii) σελ. 103}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

$\infty$   
—  
 $\infty$

- Παραγοντοποίηση
- D' Hospital

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ ,  $x > 0$ .

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , x > 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε την τιμή του  $k$  έτσι ώστε η  $g$  να είναι συνεχής.

**Μονάδες 6**

$$\frac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 2\frac{1}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + 2\frac{1}{x^2}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{\frac{1}{x^4} 2x}{-2\frac{1}{x^4} 2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{1}{\frac{x^2}{\ln x} - 2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\nu} = 0$$

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ ,  $x > 0$ .

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 10**

β. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Μονάδες 8**

$$\frac{x + \ln x}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$$

$$\frac{x + \ln x}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1 + 0 = 1$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βασικά όρια

$$\frac{1}{0^-} = -\infty \quad e^{+\infty} = +\infty$$

Αλλαγή μεταβλητής

Κανόνας D' Hospital

ΘΕΜΑ Δ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \quad f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{e^x}} \sim -\frac{x^2}{\frac{1}{e^x}}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{e^x}} \sim \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \sim \frac{e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \sim -e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βασικά όρια

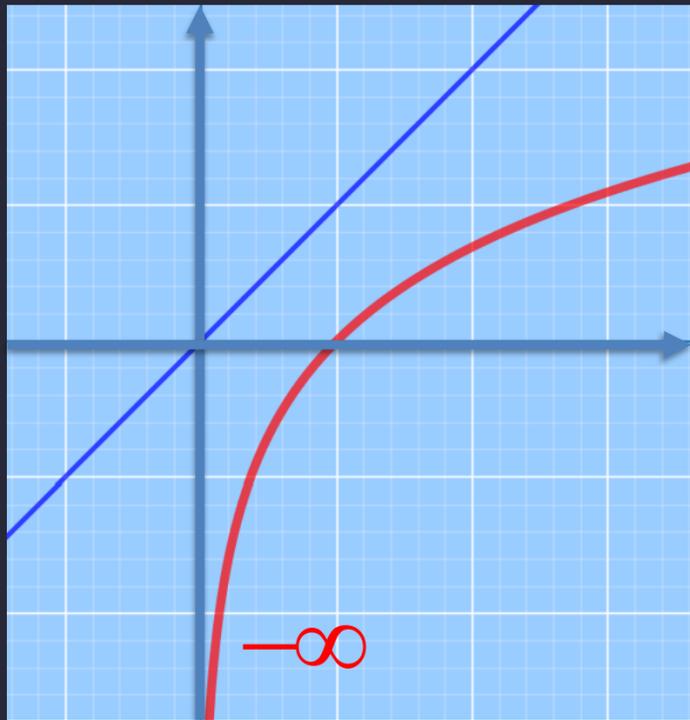
Σύνθεση (Αλλαγή  
μεταβλητής)

Κανόνας D'  
Hospital

Αν είναι  $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ ,  $x > 0$ , τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

**Μονάδες 5**



$$f(x) = e^{-x}(\ln x - x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1(-\infty - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)^2 \eta \mu \frac{1}{f(x)} - f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 \eta \mu \frac{1}{x} - x] = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\eta \mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\eta \mu u - u}{u^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\sigma \nu u - 1}{2u} \right] = 0$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Δ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$   $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x) \ln(f(x)) = 0 \cdot 0 = 0$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

Μηδενική επί φραγμένη

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$$

Να δείξετε ότι  $f'(0) = 1$

Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Δ3. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ .

Μονάδες 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$$

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$$

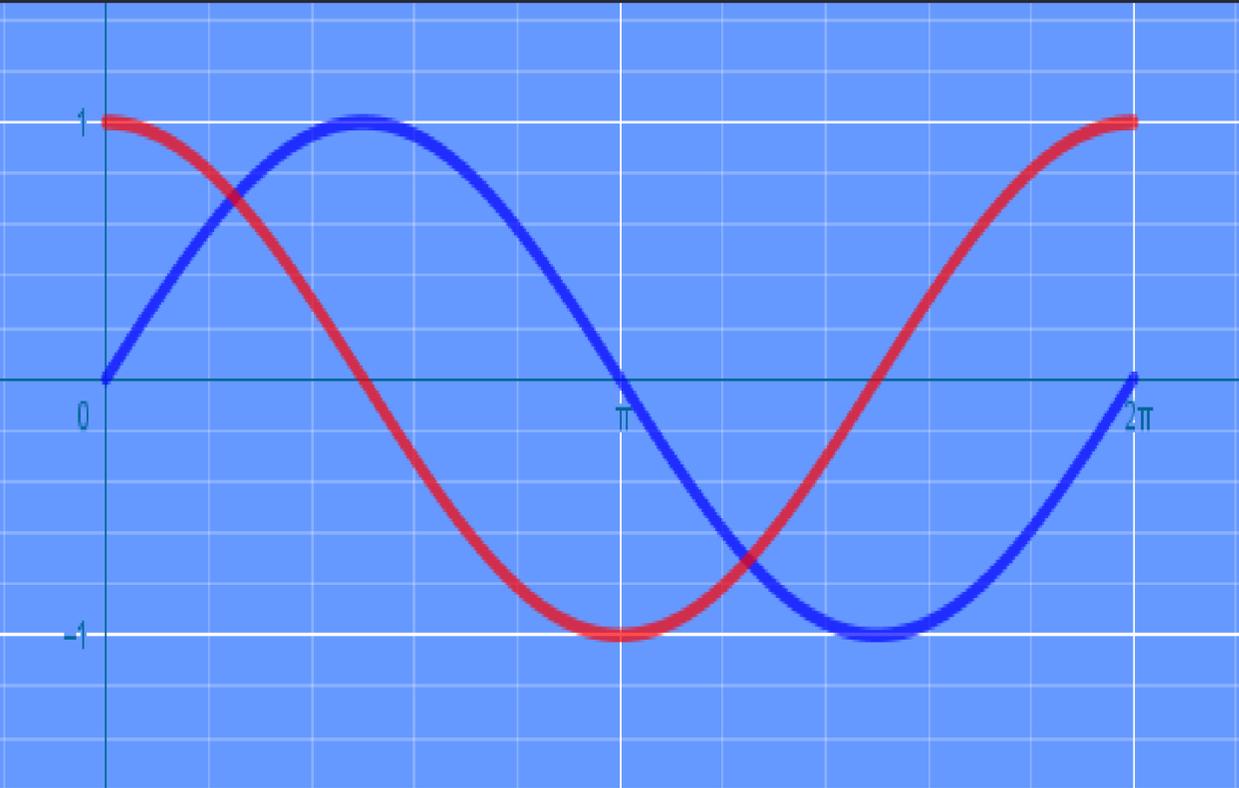
$$f(x) = \phi(x)\eta\mu x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$



$$f \nearrow \mathfrak{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} = (-\infty, +\infty) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

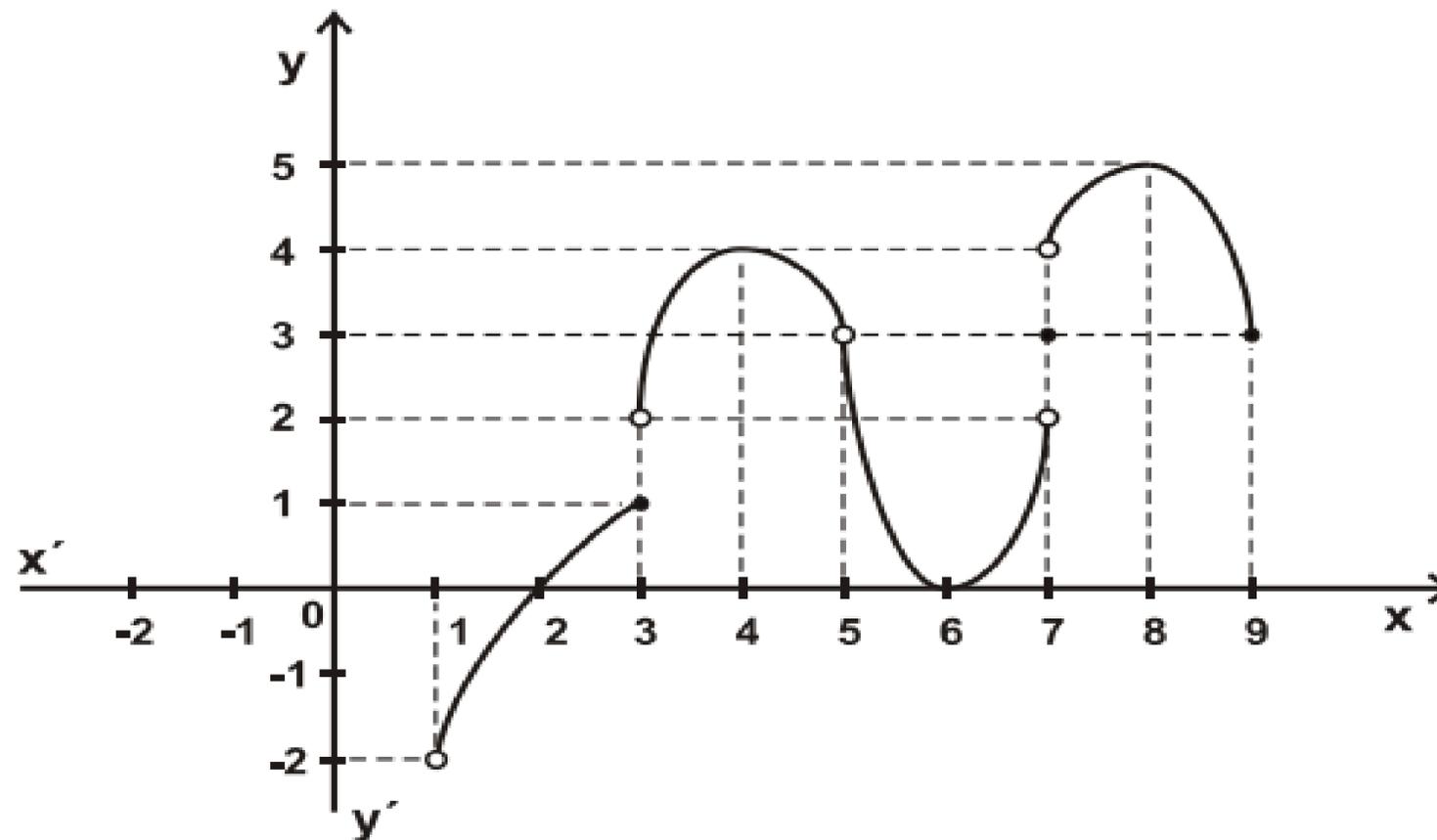
$$-2 \leq \eta\mu x + \sigma\nu x \leq 2$$

$$-2 \cdot \frac{1}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\nu x}{f(x)} \leq 2 \cdot \frac{1}{f(x)}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 0                                      0                                      0

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

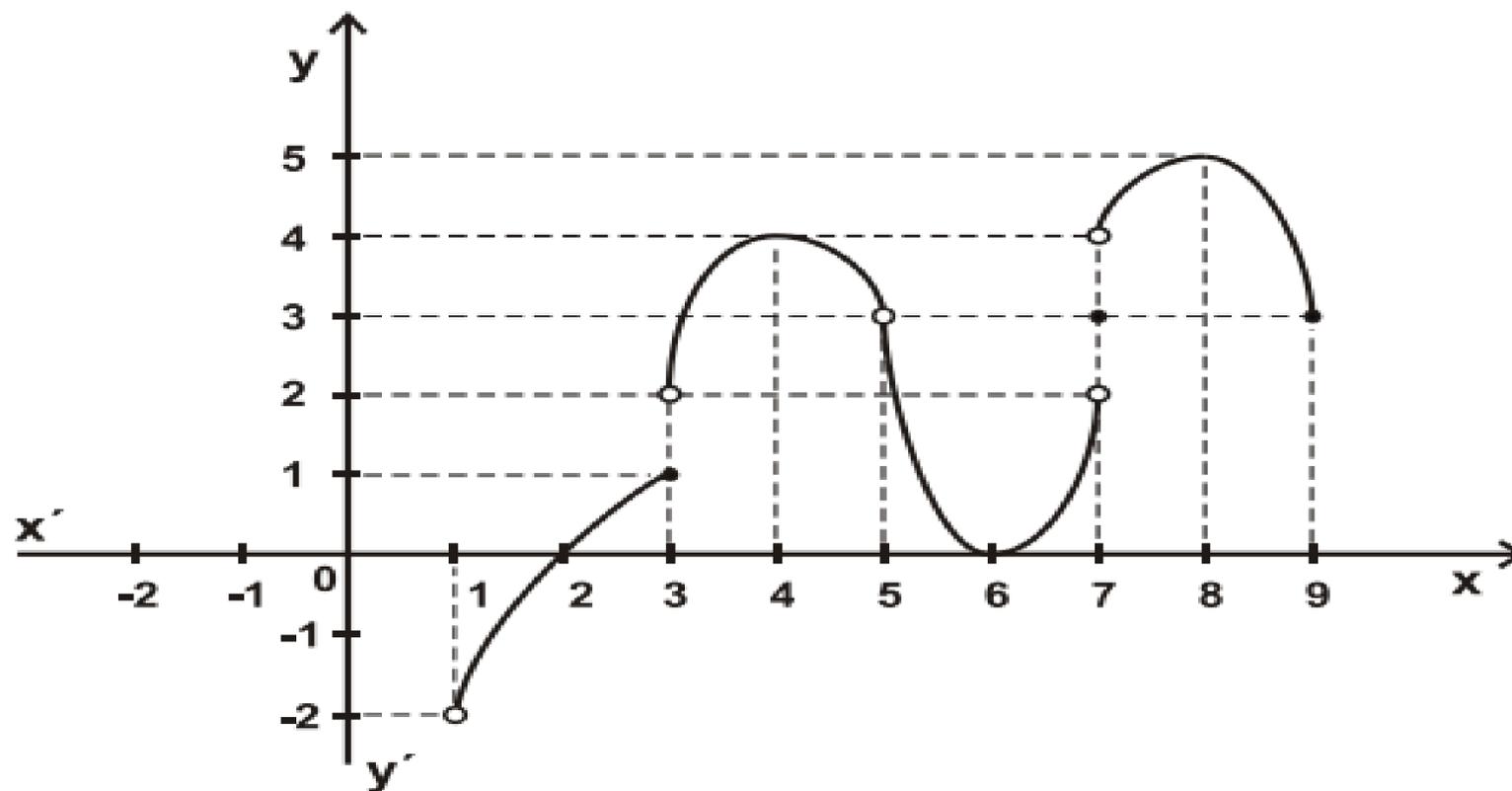
ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ I & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \ln x = 0$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

Μονάδες 8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} \sim (-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\nu \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^\nu}$$

$$\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^\nu} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu-1}} \sim \frac{1}{-\left(\frac{1}{x}\right)^\nu} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$





ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \ln x = 0$$

Κανόνας D' Hospital

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x.$$

**Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$ .

Μονάδες 5

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x.$$

$$\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} = \frac{\frac{xe^x}{e^x - 1}}{e^{f\left(\frac{1}{e^x}\right)} e^x} = \frac{e^x}{e^{f\left(\frac{1}{e^x}\right)}}$$

$$\frac{e^x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$x \ln x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow -1$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$\frac{a}{0}$

$$f(x) = -\eta\mu x, \quad x \in [0, \pi]$$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$

**Μονάδες 4**

$$f(x) = -\eta\mu x, \quad x \in [0, \pi]$$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$

Μονάδες 4

$$-\eta\mu x + x \xrightarrow{x \rightarrow \pi} \pi$$

$$-\eta\mu x - x + \pi \xrightarrow{x \rightarrow \pi} 0$$

$$-\eta\mu x - x + \pi \xrightarrow{x \rightarrow \pi} 0$$

$$\eta\mu x = \eta\mu(\pi - x) < \pi - x$$

$$0 < -\eta\mu x + \pi - x$$

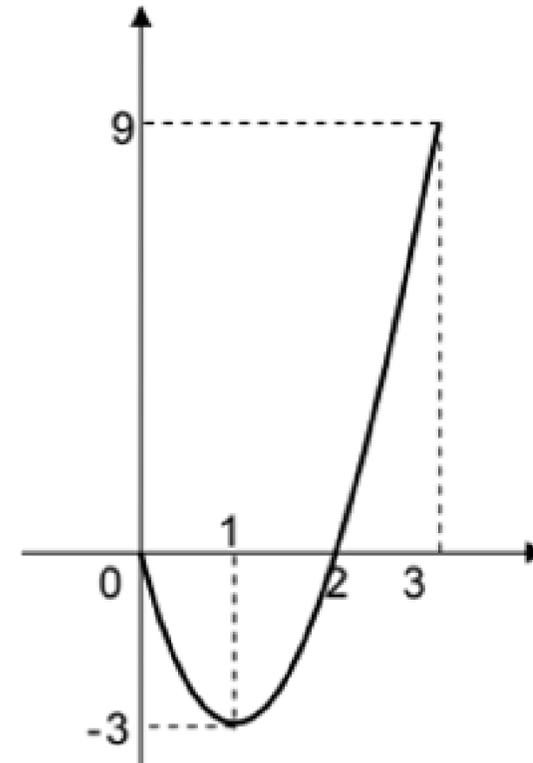
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + \pi}{f(x) - \pi + x} = \frac{\pi}{0^+} + \infty$$

## Κανόνας D' Hospital

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 3]$ , για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της  $f'$  δίνεται στο παρακάτω σχήμα:
- $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 0$   
 $f(3) = 2$ ,  $f(2) = -2$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2}$$

**Μονάδες 5**

υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (2, 3)$

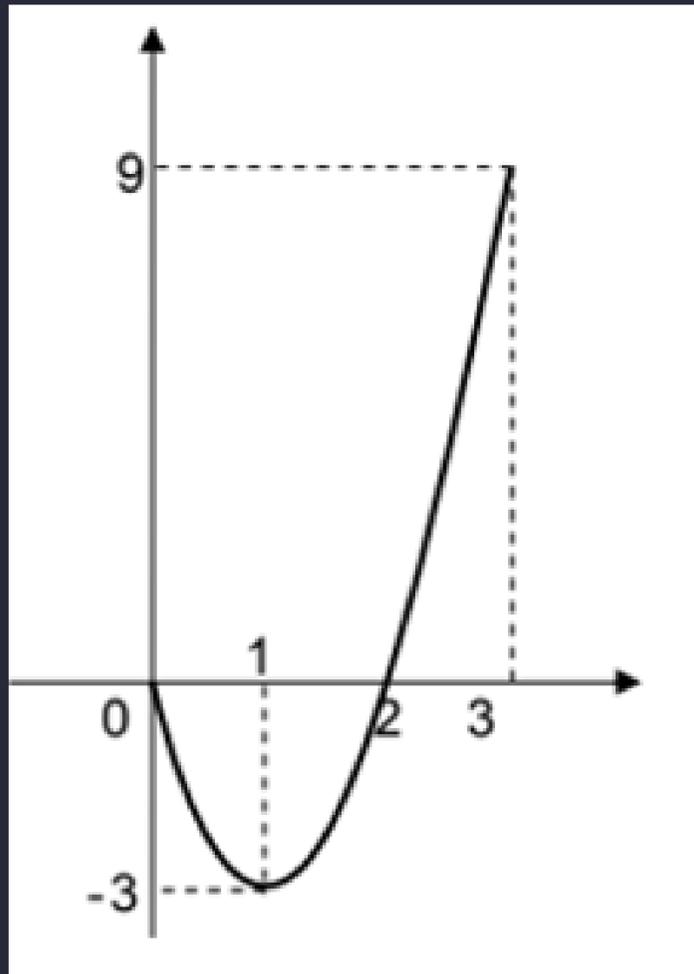
για το οποίο δεν

υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ .

**Μονάδες 5**

$$f(0) = 2, f(1) = 0$$

$$f(3) = 2, f(2) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{f'(1)}{\frac{1}{1}} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \frac{\frac{0}{0}}{\frac{1}{f'(0)}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Bolzano  $\Rightarrow \exists x_0(2, 3), f(x_0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\nu} \ln x = 0$$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = 2 \eta \mu x - x$ .

- Γ4. α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . (μονάδες 2)
- β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$ . (μονάδες 5)

**Μονάδες 7**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \ln x] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(2x)}{x} x \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x) - f(2x)}{x} x \ln x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{x} \right) x \ln x \right] = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\nu \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$\frac{\alpha}{0}$

**ΘΕΜΑ Β**

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1} .$$

**B3.** Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο  $x_0 = 2$  της συνάρτησης  
 $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x - 2}$ .

**Μονάδες 6**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \frac{\sqrt{3}}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Όριο σύνθεσης

### ΘΕΜΑ Α

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ . **Μονάδες 2**

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$  **Μονάδες 6**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left( \frac{x+2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x+2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## Ανισοτικές σχέσεις

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

$$f(x) > f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\eta\mu \frac{1}{x - x_0} > -1$$

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x - x_0} > -1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Κριτήριο Παρεμβολής

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$ .

**Μονάδες 6**

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( f(x) \eta \mu \left( \frac{1}{3x+1} \right) \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = \frac{0}{\frac{1}{3}-1} = 0$$

$$-1 \leq \eta \mu \left( \frac{1}{3x+1} \right) \leq 1$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

**B4.** Έστω η συνάρτηση  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$  (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7} - 3}{h^2(x) - 4}$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 8**

$f(x) = x^2 + \alpha$  και  $g(x) = x + \beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = \beta = -1$ .

$$x^2 + 1 \leq h(x) \leq x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{h(x)+7}-3)(\sqrt{h(x)+7}+3)}{(h(x)-2)(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(h(x)-2)}{(h(x)-2)(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24}$$

## Συζυγής παράσταση

### ΘΕΜΑ Α

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty \quad \text{Μονάδες 2}$$

### ΘΕΜΑ Β

**B4.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 9}$ . **Μονάδες 6**

$$f(x) = \alpha x + 1 \quad \alpha = 1.$$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$ . **Μονάδες 5**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  **Μονάδες 7**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)\sqrt{x+1}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## Πλευρικά όρια

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \text{συν}x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ , με  $\alpha < -3$ .

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma \nu x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \nu x - 1}{x} = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## Κριτήριο Παρεμβολής

### ΘΕΜΑ Α

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , ισχύει  
ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . **Μονάδες 2**

Β4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( e^{-h(x)} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ , όπου  $h$  είναι η  
συνάρτηση του ερωτήματος Β2. **Μονάδες 5**

$$h(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x < 0.$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{0^-} + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{0^-} + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-1 \cdot e^{-f(x)} \leq e^{-f(x)} \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1 \cdot e^{-f(x)}$$

↓

0

↓

0

↓

0

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Παραγοντοποίηση

Συζυγής παράσταση

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x$   
και συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = -x^2 + \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

για την οποία το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{-g(x)} + \alpha x \right)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$ . Μονάδες 6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - ax} + ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{1 - \frac{a}{x}} + a \right) = +\infty(1 + a) = \pm\infty, \text{ av } a \neq -1$$

av  $a = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## Συζυγής παράσταση

**A4.**

α) Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ . **Μονάδες 2**

δ) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$ . **Μονάδες 2**

**B3.**  $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$   
Θεωρούμε τη συνάρτηση: 
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x=1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση  $\varphi$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο  $[0, 1]$ . **(μονάδες 6)**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 + \sqrt{x})(1 - x)} = \frac{1}{2}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Όριο ρητής συνάρτησης

Μηδενική επί φραγμένη

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x \leq -1 \\ x^3-x, & x > -1 \end{cases} \quad \text{Μονάδες 8}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

Μονάδες 6

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = -2(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$-1 \leq \eta \mu f(x) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\eta \mu f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{1-x^3} = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e}. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ  
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ .  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

**Μονάδες 6**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3} = 1$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## Κριτήριο Παρεμβολής

### ΘΕΜΑ Α

α) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ . Μονάδες 2

Β4. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$ .

$f(x) = \frac{4-x^2}{x}$ ,  $x > 0$ . Μονάδες 6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$-1 \leq \sigma \nu(1 + x^2) \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma \nu(1 + x^2) \leq 1$$

$$-\frac{1}{f(x)} \leq \frac{\sigma \nu(1 + x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βοηθητική συνάρτηση

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f : (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3$ .

**Μονάδες 4**

$$\phi(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$$

$$f(x) = \phi(x)(x-1) + 2x$$

$$\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k = \phi(x)(x-1) + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln(2-x) - \frac{1}{x} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (\phi(x)(x-1) + 2x)$$

$$\ln 1 - \frac{1}{1} + k = 2$$

$$k = 3$$

Ευχαριστώ πολύ !

Καλή επιτυχία στις  
Εξετάσεις!

