Θέματα Άλγεβρας
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 1999

Ζήτημα 1ο

Α. Έστω P(x) ένα πολυώνυμο του x και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν π(x) είναι το πηλίκο και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο (x - ρ), τότε:

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το (x - ρ).
(Μονάδες 2,5)

β) Το υπόλοιπο υ(x) είναι:
- Α. Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το P(x).
- Β. Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.
- Γ. Σταθερό πολυώνυμο.
- Δ. Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το (x - ρ) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).
(Μονάδες 5)

Β. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = k^2 x^3 - 3kx^2 + kx + 1$, όπου k πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x - 1) είναι ίσο με το μηδέν;

Α. k = 0
Β. k = -1
Γ. k = 1
Δ. k = 2
Ε. k = -2

(Μονάδες 12,5)

Απάντηση:

Α.1.
α) Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο (x - ρ) είναι:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$$

β) Σωστή είναι η απάντηση Γ, γιατί ο διαιρέτης (x – ρ) είναι πρώτου βαθμού.

γ) Από την ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το δυώνυμο x – ρ έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης (x – ρ) είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης υ(x) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο. Έτσι, έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x) \qquad (1)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x = \rho$ και έχουμε:

$$(P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon \iff P(\rho) = 0 \bullet \pi(\rho) + \upsilon \iff \mathbf{P(\rho) = \upsilon}$$

Α.2 Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x - 1)$ είναι:

$\upsilon = P(1) = \kappa^2 \bullet 1^3 - 3\kappa \bullet 1^2 + \kappa \bullet 1 + 1 =$
$= \kappa^2 - 3\kappa + \kappa + 1 =$
$= \kappa^2 - 2\kappa + 1$

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$\upsilon = 0$ ή
$P(1) = 0$

Άρα: $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \iff (\kappa - 1)^2 = 0 \iff \kappa = 1$

Επομένως, η σωστή απάντηση είναι Γ.

Ζήτημα 2ο

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι:

Α. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = -1/2$
Β. $\alpha_1 = -64$ και $\lambda = -1/2$
Γ. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = 1/2$
Δ. $\alpha_1 = 32$ και $\lambda = 1/2$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου.
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.
(Μονάδες 7)

Απάντηση:

α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= 16 \\ a_6 &= 2 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} a_1 \cdot \lambda^2 &= 16 \\ a_1 \cdot \lambda^5 &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$1/\lambda^3 = 8 \iff \lambda^3 = 1/8 \iff \boldsymbol{\lambda = 1/2}$$

Άρα:

$$\alpha_1 \bullet \lambda^2 = 16 \iff \alpha_1 \bullet 1/4 = 16 \iff \boldsymbol{\alpha_1 = 64}$$

Επομένως, σωστή είναι η απάντηση Γ.

β) Ο δέκατος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 64 \cdot (1/2)^9 = 2^6 \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^3}$$

$$\text{Άρα}: \quad \alpha_{10} = \frac{1}{8}$$

γ) Επειδή είναι |λ| = |1/2| < 1, το άθροισμα S των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{64}{1-(1/2)} = \frac{64/1}{1/2} \Leftrightarrow S = 128$$

Ζήτημα 3ο

α) Να αποδείξετε ότι: ημ6x + ημ4x = 2ημ5x • συνx.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: ημ6x + ημ4x + 4ημ5x = 0.

(Μ0νάδες 15)

Απάντηση:

α) Γνωρίζουμε ότι:

ημA + ημB = 2ημ(A + B)/2 συν(A – B)/2

Επομένως για A = 6x και B = 4x έχουμε:

ημ6x + ημ4x = 2ημ (6x + 4x)/2 συν (6x + 4x)/2 ⇔

⇔ ημ6x + ημ4x = 2ημ (10x)/2 συν (2x)/2 ⇔

⇔ ημ6x + ημ4x = 2ημ(10x)/2 συν(2x)/2 ⇔

⇔ **ημ6x + ημ4x = 2ημ5xσυνx**

β) Έχουμε:

ημ6x + ημ4x + 4ημ5x = 0 ⇔ 2ημ5xσυνx + 4ημ5x = 0 ⇔
⇔ 2ημ5x(συνx + 2) = 0 (1)

Από την ισότητα (1) προκύπτει ότι:

i) συνx + 2 = 0 ⇔ συνx= -2 (αδύνατη)

ii) ημ5x = 0 ⇔ ημ5x = ημ0 ⇔ 5x = 2κπ ή 5x = 2κπ + π ⇔

⇔ 5x = 2κπ ή 5x = (2κ + 1)π ⇔ 5x = κπ ⇔ x = (κπ)/5 με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ζήτημα 4ο

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.
Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.
Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.
(Μονάδες 5)
β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.
(Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε την τιμή του ω.
(Μονάδες 5)
δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.
(Μονάδες 5)
ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.
(Μονάδες 5)

Απάντηση:

Αν Α είναι η τιμή αγοράς του Η/Υ και Β το οφειλόμενο υπόλοιπο, τότε θα έχουμε ότι: Α = 120 + Β σε χιλ. δρχ.
Έστω τώρα $α_1$ η πρώτη δόση, $α_2$ η δεύτερη δόση, …, και $α_{10}$ η δέκατη δόση. Τότε θα έχουμε:
$α_1$
$α_2 = α_1 + ω$
………………..
$α_{10} = α_9 + ω$

δηλαδή μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω.

α) Το ποσό της πρώτης δόσης είναι ο πρώτος όρος $α_1$ της αριθμητικής προόδου. Από την υπόθεση έχουμε ότι $α_4 = 48$ χιλιάδες δρχ. Επομένως:

$$α_4 = α_1 + 3ω \Leftrightarrow 48 = α_1 + 3ω \Leftrightarrow \mathbf{α_1 = 48 - 3ω} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$

β) Έστω Α χιλιάδες δρχ. η τιμή αγοράς του υπολογιστή. Η τιμή αγοράς Α θα είναι ίση με $Α = 120 + S_{10}$ χιλιάδες δρχ., όπου S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (δηλαδή το άθροισμα των 10 δόσεων) και το 120 είναι οι 120 χιλιάδες δρχ. που δώσαμε ως προκαταβολή. Άρα:

$$Α = 120 + S_{10} \Leftrightarrow Α = 120 + (10/2)\,(2α_1 + 9ω) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Α = 120 + 5(2α_1 + 9ω) \Leftrightarrow Α = 120 + (10α_1 + 45ω) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Α = 120 + 10(48 - 3ω) + 45ω \Leftrightarrow Α = 120 + 480 - 30ω + 45ω \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Α = 600 + 15ω} \textbf{ χιλιάδες δρχ.}$$

γ) Επειδή η τιμή της αγοράς του υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δρχ. και μικρότερη από 640 χιλιάδες δρχ. θα έχουμε ότι:

$$620 < A < 640 \iff 620 < 600 + 15\omega < 640 \iff$$

$$\iff 620 - 600 < 15\omega < 640 - 600 \iff 20 < 15\omega < 40 \iff$$

$$\iff \frac{20}{15} < \frac{15\omega}{15} < \frac{40}{15} \iff 1,\overline{3} < \omega < 2,\overline{6}$$

Και επειδή ο ω είναι ακέραιος, προκύπτει ότι:

ω = 2 χιλιάδες δρχ.

δ) Η τελευταία δόση είναι η δέκατη, δηλαδή ο δέκατος όρος α_{10} της αριθμητικής προόδου θα είναι:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \iff \alpha_{10} = 48 - 3\omega + 9\omega \iff \alpha_{10} = 48 + 6\omega \iff$$

$$\iff \alpha_{10} = 48 + 6 \bullet 2 \iff \mathbf{\alpha_{10} = 60} \text{ **χιλιάδες δρχ.**}$$

ε) Επειδή είναι ω = 2 χιλιάδες δρχ., έχουμε:

$$A = 600 + 15\omega \iff A = 600 + 15 \bullet 2 \iff A = 600 + 30 \iff$$

$$\iff \mathbf{A = 630} \text{ **χιλιάδες δρχ.**}$$

Θέματα Άλγεβρας
Γενικής Παιδείας
Β΄ Λυκείου 2000

Ζήτημα 1ο

Α.1. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) που έχει πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

(Μονάδες 3)

Α.2. Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ, έτσι ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

Α.3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, είναι:

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

(Μονάδες 6,5)

Β.1. Στη στήλη Α δίνεται ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη στήλη Β ο νιοστός όρος α_ν τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\alpha_1 = 1$, $\omega = -2$	1. $\alpha_\nu = -\nu$
β. $\alpha_1 = 0$, $\omega = 3$	2. $\alpha_\nu = 4\nu - 3$
γ. $\alpha_1 = -1$, $\omega = -1$	3. $\alpha_\nu = 3 - 2\nu$
	4. $\alpha_\nu = 3\nu - 3$

(Μονάδες 6)

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Οι αριθμοί –5, 5, 15, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου 10, 7, 4 … είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) για τους όρους της α_2, α_4, α_6 ισχύει η σχέση $2\alpha_4$, $= \alpha_2 + \alpha_6$.

(Μονάδες 4,5)

Β.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι ίσο με:

Α. $\frac{2^{\nu}-1}{2}$.

Β. $2^{\nu} - 1$.

Γ. $2^{\nu-1}$.

Δ. $1 - 2^{\nu}$.

Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

(Μονάδες 2)

Απάντηση:

Α.1.Ο τύπος που δίνει τον νιοστό όρο μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_{\nu} = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Α.2. Η σχέση που συνδέει τρεις διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = (\alpha+\gamma)/2$$

Α.3. Έστω α_1, α_2, α_3, … , α_{ν} οι ν πρώτοι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Τότε το άθροισμα τους S_{ν} θα είναι:

$S_{\nu} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{\nu} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{\nu} = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) επί λ και έχουμε:

$\lambda \bullet S_{\nu} = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu}$ (2)

Αφαιρούμε από τη σχέση (2) τη σχέση (1) και έχουμε:

$\lambda S_{\nu} - S_{\nu} = \alpha_1 \lambda^{\nu} - \alpha_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)S_{\nu} = \alpha_1(\lambda^{\nu} - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{\nu} = \alpha_1(\lambda^{\nu} - 1)/(\lambda - 1)$, αφού $\lambda \neq 1$.

Β.1. Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_{\nu} = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Αντικαθιστούμε σ' αυτόν τις τιμές των α_1 και ω της στήλης Α και βρίσκουμε:

α.Αν $\alpha_1 = 1$ και $\omega = -2$ τότε:

$\alpha_{\nu} = 1 + (\nu - 1) \bullet (-2) \Leftrightarrow \alpha_{\nu} = -2\nu + 3.$

β. Αν $\alpha_1 = 0$ και $\omega = 3$ τότε:

$\alpha_{\nu} = 0 + (\nu - 1) \bullet 3 \Leftrightarrow \alpha_{\nu} = 3\nu - 3.$

γ. Αν $α_1 = -1$ και $ω = -1$ τότε:

$α_ν = -1 + (ν - 1) \bullet (-1) \Leftrightarrow α_ν = -ν$.

Επομένως:

α ↔ 3, β ↔ 4, γ ↔ 1

Β.2.

α. Έχουμε $α = -5$, $β = 5$, $γ = 15$.

Για να είναι οι αριθμοί α, β και γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει:

$2β = γ + α \Leftrightarrow 2 \bullet 5 = 15 + (-5)$,

που ισχύει. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

β. Η αριθμητική πρόοδος έχει $α_1 = 10$, $ω = -3$, οπότε:

$α_{20} = α_1 + (20 - 1)ω = 10 + 19 \bullet (-3) \Leftrightarrow α_{20} = -47$,

άρα η πρόταση είναι **λάθος**.

γ. Αφού έχουμε αριθμητική πρόοδο, θα ισχύει:

$α_4 = α_1 + 3ω$, $α_2 = α_1 + ω$, $α_6 = α_1 + 5ω$.

Τότε: $2α_4 = α_2 + α_6 \Leftrightarrow 2(α_1 + 3ω) = α_1 + ω + α_1 + 5ω$,

που ισχύει, άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

Επομένως:

α ↔ Σ, β ↔ Λ, γ ↔ Σ

Β.3. Έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $α_1 = 1$ και $λ = 2$, οπότε:

$$S_ν = α_1 \frac{λ^ν - 1}{λ - 1} = 1 \cdot \frac{2^ν - 1}{2 - 1} = 2^ν - 1$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η **Β**.

Ζήτημα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$P(x) = αx^3 + (β - 1)x^2 - 3x - 2β + 6$

Όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x + 1 είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α = 2 και β = 4.

(Μονάδες 15)

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (α), να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α) Επειδή ο αριθμός x = 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) θα έχουμε P(1) = 0, κι αφού η διαίρεση του P(x) με το x + 1 αφήνει υπόλοιπο 2, έχουμε: P(-1) = 2. Οπότε:

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+(\beta-1)-3-2\beta+6=0 \\ -\alpha+(\beta-1)+3-2\beta+6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ -\alpha-\beta=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=4 \end{cases}$$

Για τις τιμές α = 2 και β = 4 το πολυώνυμο P(x) γράφεται:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \quad ή \\ 2x^2+5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \quad ή \\ x=-2 \quad ή \quad x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα: x = 1 ή x = -2 ή x = -(1/2).

Ζήτημα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2ημxσυνx - 2ημ^2x - 4συν^2x$$

όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να μετατρέψετε τη συνάρτηση f στη μορφή f(x) = ρημ(2x + φ) + κ, όπου ρ, φ, κ πραγματικοί αριθμοί και ρ > 0.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

στο διάστημα [0, π].

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α) Γνωρίζουμε ότι:

$$ημ2x = 2\,ημxσυνx,\ ημ^2x = \frac{1 - συν2x}{2}, συν^2x = \frac{1 + συν2x}{2}$$

οπότε:

$f(x) = 2ημxσυνx - 2ημ^2x - 4συν^2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = ημ2x - 2\frac{1 - συν2x}{2} - 4\frac{1 + συν2x}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x) = ημ2x - 1 + συν2x - 2 - 2συν2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = ημ2x - συν2x - 3.$

Έστω $g(x) = ημ2x - συν2x$, $x \in R$. Τότε:

$$ρ = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

$$ημφ = \frac{β}{ρ} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

$$συνφ = \frac{α}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$φ = -\frac{\pi}{4}$$

Επομένως:

$$g(x) = \sqrt{2}ημ\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

και

$$f(x) = \sqrt{2}ημ\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$$

β) Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν το

$$\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

γίνεται μέγιστο, δηλαδή όταν το ημίτονο είναι ίσο με 1. Επομένως πρέπει:

$$\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\dfrac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 2x-\dfrac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{2} \end{cases} ,\mu\varepsilon\ \kappa\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\kappa+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \quad ,\mu\varepsilon\ \kappa\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{8} \quad ,\mu\varepsilon\ \kappa\in Z$$

Τότε η μέγιστη τιμή είναι:

$$f\left(\kappa\pi+\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cdot 1-3 \Leftrightarrow f\left(\kappa\pi+\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-3 \quad ,\mu\varepsilon\ \kappa\in Z$$

γ) $f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-3-\sqrt{2}\eta\mu\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]+3=\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν2x = συν\frac{3π}{4} \Leftrightarrow 2x = 2κπ \pm \frac{3π}{4},\ \ όπου\ \ κ \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = κπ \pm \frac{3π}{8},\ \ όπου\ \ κ \in Z$$

Όμως, $x \in [0, π]$ δηλαδή $0 \leq x \leq π$. Επομένως:

- Αν
  $x = κπ + \frac{3π}{8}$:

$$0 \leq κπ + \frac{3π}{8} \leq π, με\ κ \in Z \Leftrightarrow -\frac{3π}{8} \leq κπ \leq \frac{5π}{8}, με\ κ \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq κ \leq \frac{5}{8}, με\ κ \in Z$$

άρα κ = 0 και
$$x = \frac{3π}{8}$$

- Αν
  $x = κπ - \frac{3π}{8}$:

$$0 \leq κπ - \frac{3π}{8} \leq π, με\ κ \in Z \Leftrightarrow \frac{3π}{8} \leq κπ \leq \frac{11π}{8}, με\ κ \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq κ \leq \frac{11}{8}, με\ κ \in Z$$

άρα κ = 1 και
$$x = \frac{5π}{8}$$

Ζήτημα 4ο

Ένας αριθμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

(Μονάδες 9)

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \bullet 10$ βακτηριδίων ανά ώρα.

1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

(Μονάδες 8)

2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

Α. Επειδή ο πληθυσμός των βακτηριδίων τριπλασιάζεται κάθε ώρα, σημείνει ότι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = 3$.
Επειδή αρχικά έχουμε 10 βακτηρίδια, στο τέλος της πρώτης ώρας θα υπάρχουν 30 βακτηρίδια, άρα
$\alpha_1 = 30$. Επομένως:

$\alpha_\nu = \alpha_1 \bullet \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 30 \bullet 3^{\nu-1}$

και:

$\alpha_6 = 30 \bullet 3^{6-1} = 30 \bullet 3^5 = 30 \bullet 243 \Leftrightarrow \alpha_6 = 7.290$ βακτηρίδια.

Β.1. Επειδή με τον ψεκασμό καταστρέφονται $3^3 \bullet 10$ βακτηρίδια, σε 20 ώρες θα έχουν καταστραφεί:

$3^3 \bullet 10 \bullet 20 = 27 \bullet 200 = 5.400$ βακτηρίδια.

Άρα απομένουν:

$7.290 - 5.400 = 1.890$ βακτηρίδια.

Β.2. Έστω ότι τα βακτηρίδια καταστρέφονται μετά από t ώρες. Τότε θα πρέπει:

$t \bullet 3^3 \bullet 10 = 7.290 \Leftrightarrow 270t = 7.290 \Leftrightarrow t = 7.290/270 \Leftrightarrow t = 27$ ώρες

Επομένως όλα τα βακτηρίδια θα έχουν καταστραφεί μετά από 27 ώρες.

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0.

Μονάδες 6,5

Α.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Έστω πολυώνυμο P(x) και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x–ρ και π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x–ρ, τότε:

α. $P(x) = (x - \rho)\, \pi(x) + 1$

β. $\pi(x) = (x - \rho)\, P(x)$

γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 6

Β.1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το – 3 .

Μονάδες 6

Β.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$ **β.** $x - 1$ **γ.** x **δ.** $x + \frac{5}{4}$.

Μονάδες 6,5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ – ΘΕΜΑ 1

Α.1. Σελ. 74 σχολικού βιβλίου (Θεωρ. Ακεραίων Ριζών).

Α.2. Έστω πολυώνυμο P(x) και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το P(x) έχει παράγοντα και το x – ρ και π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x – ρ, τότε:
δ. $P(\rho) = 0$

Β.1.α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4. ***Λάθος***
β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2. ***Λάθος***

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3 ***Σωστό***

Β.2. Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$

$P(-1) = 1^{2004} + (-1)^{2001} = 1 - 1 = 0$

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη γωνία α ισχύει ότι

$$5\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\,\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0 .$$

α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$.

Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α και εφ2α.

Μονάδες 15

ΑΠΑΝΤΗΣΗ – ΘΕΜΑ 2

$5\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\,\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$

α. $5(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) - 14\,\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$

……………………………………..

$5\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 7\sigma\upsilon\nu\alpha - 6 = 0$

$\Delta = 169$

άρα

$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$

$\sigma\upsilon\nu\alpha = 2$ ***απορρίπτεται*** διότι $-1 \le \sigma\upsilon\nu\alpha \le 1$

άρα: $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$

β. $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ Τότε ημα < 0 και συνα <0

ημ2α = 2ημασυνα

$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\eta\mu\alpha = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = -\sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$$

Άρα $\quad \eta\mu 2\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = -\frac{24}{7}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με α_3 = log125 και η διαφορά της είναι ίση με ω = log5.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + ... + \alpha_{29}$.

Μονάδες 8

γ. Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + ... + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ – ΘΕΜΑ 3

α. $\alpha_3 = \log 5^3 = 3\log 5$ και $\omega = \log 5$

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow$

$\alpha_1 = \alpha_3 - 2\omega = 3\log 5 - 2\log 5 = \log 5 = \omega$

β. $\alpha_{21} = \alpha_1 + 20\omega = \log 5 + 20\log 5 = 21\log 5$

$\alpha_{29} = \alpha_1 + 28\omega = 29\log 5$

$$\mathrm{A} = \Sigma_9 = \frac{(\alpha_{21} + \alpha_{29})9}{2} = \frac{(21+29)\log 5}{2} 9 = 225 \cdot \log 5$$

<u>β΄ τρόπος</u>

Το ζητούμενο άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + ... + \alpha_{29}$ μπορεί να βρεθεί και ως εξής:

$$A = S_{29} - S_{20} = \frac{29}{2}[2\alpha_1 + 28 \cdot \omega] - \frac{20}{2}[2\alpha_1 + 19\omega] = ... = 225 \cdot \log 5$$

γ. Θεωρώ την γεωμετρική πρόοδο γ_ν με $\gamma_1 = \beta_1 = \log 5$ και $\lambda = 4$.

$\gamma_\nu = \beta_{2001} \Leftrightarrow \log 5 \cdot 4^{\nu-1} = \log 5 \cdot 2^{2000} \Leftrightarrow \nu = 1001$

άρα $S_{1001} = \gamma_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = \log 5 \dfrac{4^{1001} - 1}{3}$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου α, β $\in \mathbf{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}, \quad t \geq 0$,

Μονάδες 10

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με 1/16 της αρχικής του τιμής,

Μονάδες 8

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 7

Αφού η μέτρηση είναι σε εκατοντάδες χιλιάδες τότε οι 300.000 δραχμές είναι 3 μονάδες.

Αφού ο χρόνος μετριέται σε έτη, άρα οι 6 μήνες είναι ½ μονάδα.

α. $Q(0) = 3 \Leftrightarrow \ln 3 = \beta$

$Q(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{3}{2} = \alpha\frac{1}{2} + \ln 3 \Leftrightarrow \alpha = -\ln 4$

άρα $\ln Q(t) = (-\ln 4)t + \ln 3 \Leftrightarrow Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$

β. $Q(t) = \frac{1}{16}Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} = \frac{1}{16}3 \Leftrightarrow t = 2$

γ. $Q(t) \leq \frac{1}{9}Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{9}3 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 9}{\ln 4}$

άρα ο ελάχιστος χρόνος είναι $t = \dfrac{\ln 9}{\ln 4} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x \quad , \quad \theta>0$

β. Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε θ_1 , $\theta_2 >0$ ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 \cdot \log_\alpha\theta_2$

γ. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

δ. $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

ε. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$.

Μονάδες 10

Γ. Πότε μία ακολουθία λέγεται:

α. αριθμητική πρόοδος;

β. γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$, $\alpha_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 8

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

Μονάδες 10

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, $\theta>0$ και $k\in IR$, να δείξετε ότι ισχύει: $\log_{\alpha}\theta^{k} = k\log_{\alpha}\theta$.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 ισχύει

$$\log\frac{x_1}{x_2} = \frac{\log x_1}{\log x_2}$$

β) Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι

$$S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$$

γ) Αν υ(x) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου Δ(x) δια του δ(x), όπου δ(x) και υ(x) είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του υ(x) είναι μικρότερος από τον βαθμό του δ(x).

δ) Εάν α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

Μονάδες 4

Γ. *Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται με ...*

α. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\dots}$

όπου α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος

β. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \dots$

όπου θ>0 και α>0 με α≠1

γ. $\log_a a^x = \dots$

όπου α>0 με α≠1 και x ε IR

Μονάδες 6

Δ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων ημx και συνx.

x	0 — $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ — π	π — $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ — 2π
ημx				
συνx				

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να λύσετε την εξίσωση

ημ2x- $\sqrt{3}$συνx=0.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\phi\frac{\alpha}{2}$$

για όλες τις τιμές του α που ορίζεται η ισότητα.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4-8x^3+(5α-1)x^2+8x-3α-6$, όπου
α ε IR .

α. Να κάνετε την διαίρεση του P(x) δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Μονάδες 4

γ. Για α=3, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης P(x)=0 καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}+3\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-1}$$

Μονάδες 13

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x)+g(x+1)+g(x+2)+...+g(x+49)=\frac{125(5^{50}-1)}{4}$$

Μονάδες 12

Β΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

1. Αν συνα$\neq$0, συνβ$\neq$0, συν(α+β) $\neq$0, να δείξετε ότι:

$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}.$$

Μονάδες 9

2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η συνάρτηση f(x)=ρημωx έχει περίοδο Τ=2ωπ για οποιοδήποτε ω>0, ρ>0.

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x−ρ είναι υ=P(ρ).

γ. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$ με λόγο λ$\neq$1 είναι:

$$S_ν=α_1\frac{λ^ν-1}{1-λ}.$$

δ. Αν α>0 με α$\neq$1, τότε για οποιοδήποτε $θ_1$>0, $θ_2$>0 ισχύει:

$$\log_α(θ_1+θ_2)=\log_αθ_1\cdot\log_αθ_2.$$

Μονάδες 8

3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στον σωστό τύπο.*

Αν γνωρίζουμε το συν2α (συν2α$\neq$−1), ο τύπος που εκφράζει την $εφ^2α$ είναι:

α. $εφ^2α = \frac{1+συν2α}{2}$.

β. $εφ^2α = \frac{1-συν2α}{1+συν2α}$.

γ. $εφ^2α = \frac{1-συν2α}{2}$.

Μονάδες 4

4. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x)=α^x$ με $α>0$ και $α \neq 1$.

α. Για ποιες τιμές του α η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

β. Για ποιες τιμές του α η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{3}\,συνx - ημx = 0$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 15

β. Ποιες από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(0, 3π)$;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος $(α_ν)$ με $α_4=4$ και $α_7=32$ και το πολυώνυμο

$P(x)=2x^4+k^3x^3-6k^2x^2-2(k+2)x-4k$, $k \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

Μονάδες 12

β. Αν ο τρίτος όρος α_3 της γεωμετρικής προόδου είναι μία ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, να βρείτε τις τιμές του k.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

1. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες;

$\log x^4 = 4\log(-x)$, $\log x^2 = 2\log x$, $\dfrac{\log x^4}{\log x^2} = 2$.

Μονάδες 12

2. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2)^{1+\log x^4} = 10^6$.

Μονάδες 13

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (*για τους εξεταζομένους*)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε <u>στο τετράδιό σας σε όλα</u> τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ