Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\mathrm{B\Gamma}^2}{2}$$

Μονάδες 10

Α2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ να συμπληρώσετε τη σχέση

$$\mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{AB}^2 = \cdots\cdots\cdots$$

ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Μονάδες 2,5

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2** .

Β1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: β=8, γ=6 και μ_α=5. Η πλευρά α είναι ίση με:

Α. 7 Β. 4 Γ. 10 Δ. 9 Ε. 11

Μονάδες 6,5

Β2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται α=4, β=7, γ=5, ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος. Η προβολή ΔΜ της διαμέσου ΑΜ πάνω στη πλευρά α είναι ίση με:

Α. 4 Β. 8 Γ. 8/3 Δ. 5 Ε. 3

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ=4, ΑΔ=3, ΒΓ=5.

Να υπολογίσετε:

α) την προβολή της ΒΓ πάνω στην ΔΓ

Μονάδες 9

β) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ

Μονάδες 9

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ=15.

Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα R του κύκλου

Μονάδες 6

β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο,R)

Μονάδες 6

γ) το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 6

δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ=ΟΔ και φέρουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{M\Delta}^2 = \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta B}$

Μονάδες 6

β) $\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma E} = \mathrm{M\Delta}\cdot\mathrm{\Delta Z} = R^2 - \mathrm{O\Delta}^2$.

Μονάδες 6

γ) $\mathrm{M\Gamma}^2 + \mathrm{M\Delta}^2 = 2(R^2 + \mathrm{O\Delta}^2)$

Μονάδες 5

δ) $$\frac{\mathrm{M\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}} + \frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}} = 2\frac{\mathrm{R}^2 + \mathrm{O\Delta}^2}{\mathrm{R}^2 - O\Delta^2}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $ΑΒ^2$	**1.** $ΑΒ^2+ΒΓ^2$
β. $ΑΓ^2$	**2.** $\frac{ΒΔ}{ΓΔ}$
γ. $\frac{AB^2}{ΑΓ^2}$	**3.** $\frac{ΓΔ}{ΒΔ}$
	4. $ΒΓ \cdot ΒΔ$
	5. $ΒΓ^2-ΑΒ^2$
	6. $ΑΒ \cdot ΒΓ$

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2.**

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) με ύψος ΑΔ, για το οποίο έχουμε ΒΔ=1 και ΒΓ=3.

Β1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$

Μονάδες 6,5

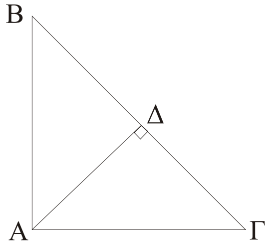
Β2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. <u>Θεώρημα 9.4</u> σελ. 211 σχολικού βιβλίου



A.2.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	**4.** $B\Gamma \cdot B\Delta$
β. $A\Gamma^2$	**5.** $B\Gamma^2 - AB^2$
γ. $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**2.** $\dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

Β.1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:
γ. $\sqrt{2}$

<u>γιατί:</u> $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 1 \cdot 2 = 2$

Β.2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:
α. $\sqrt{3}$

<u>γιατί:</u> $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma = 1 \cdot 3 = 3$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΓΑ=8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

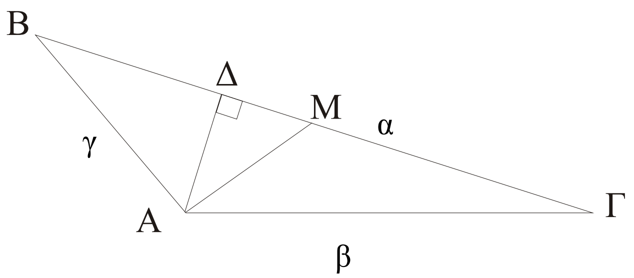
β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α.

$$\left.\begin{array}{r} B\Gamma^2 = 12^2 = 144 \\ AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{c} B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2 \\ \hat{A} > 90^{O} \end{array}$$

β. $$\mathrm{AM}^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{128 + 72 - 144}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

$$\mathrm{AM} = \sqrt{14}$$

γ. $$\Delta\mathrm{M} = \pi\rho o\beta_{\alpha}\mu_{\alpha} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{64 - 36}{2 \cdot 12} = \frac{7}{6}$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$, $z\hat{O}x$ έτσι ώστε $x\hat{O}y$ = $y\hat{O}z$ =150°. Στις ημιευθείες Ox, Oy, Oz παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ=2, ΟΒ=4 και ΟΓ=6.

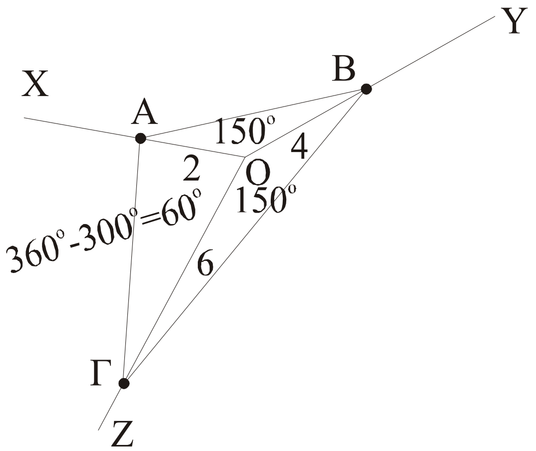
α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{ΟΓΑ}$ του τριγώνου ΟΓΑ.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$.

Μονάδες 13

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α. $$(\mathrm{O\Gamma A}) = \frac{1}{2}\mathrm{O\Gamma} \cdot \mathrm{OA} \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\tau.\mu.$$

β. Επειδή $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ παίρνουμε τον λόγο των εμβαδών:

$$\frac{(\mathrm{OAB})}{(\mathrm{OB\Gamma})} = \frac{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}}{\mathrm{OB} \cdot \mathrm{O\Gamma}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ=2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι ΓΕ = $2\sqrt{2}$ R .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ=ΓΔ·ΓΕ .

Μονάδες 10

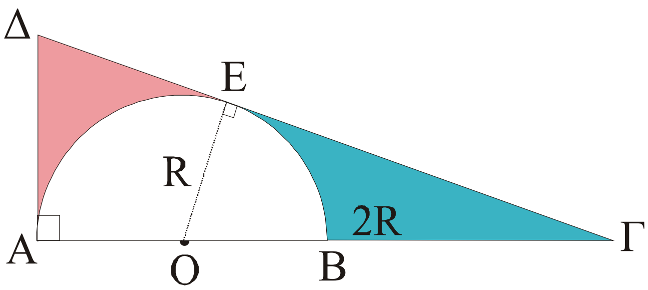
γ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α. $\Gamma\mathrm{E}^2 = \Gamma\mathrm{O}^2 - \mathrm{OE}^2 = (3R)^2 - R^2 = 8R^2$

$\Gamma\mathrm{E} = 2\sqrt{2}R$

β. Το ΟΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{E}} = 180^{\mathrm{O}}$.
Εφαρμόζοντας το θεώρημα για τις τέμνουσες από το σημείο Γ εκτός κύκλου έχουμε:
ΓΟ · ΓΑ = ΓΕ · ΓΔ

γ. $\Gamma\Delta = \dfrac{\Gamma\mathrm{O}\cdot\Gamma\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{E}} = \dfrac{3R\cdot 4R}{2\sqrt{2}R} = \dfrac{6R\sqrt{2}}{2} = 3R\sqrt{2}$

δ. $\mathrm{A}\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 - \mathrm{A}\Gamma^2 = 18R^2 - 16R^2 = 2R^2$

$\mathrm{A}\Delta = R\sqrt{2}$

Το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ είναι:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mathrm{A}\Gamma\Delta} - \mathrm{E}_{\eta\mu.} = \frac{\mathrm{A}\Gamma\cdot\mathrm{A}\Delta}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4R\cdot R\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{(4\sqrt{2}-\pi)R^2}{2}$$

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 10

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$, όπου $\Delta^{P}_{(O,R)}$ η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,R).

Μονάδα 1

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90°$.

Μονάδα 1

γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu B$.

Μονάδα 1

δ. Σε κύκλο (Ο, R), το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ° δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$.

Μονάδα 1

Β΄ ΤΑΞΗ

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο: $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2+\frac{\mu_\alpha^2}{2}$.

Μονάδα 1

Β. α. Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (O,R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$, όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$. Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2-\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{2}$,

α. να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

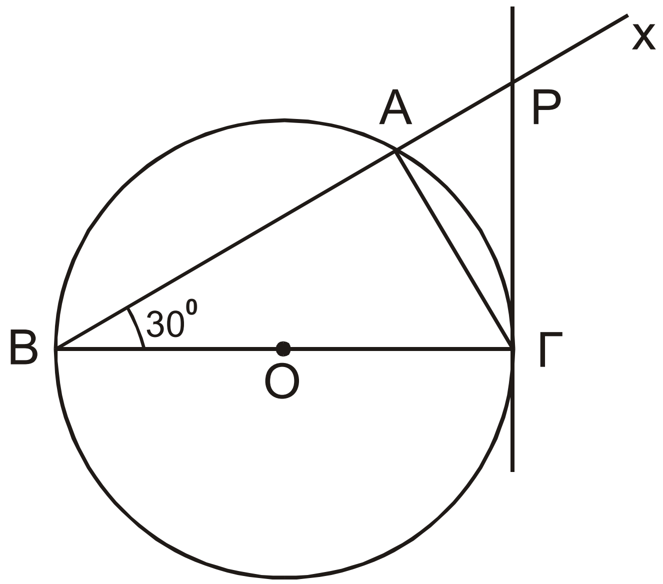
Μονάδες 15

β. να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια, ώστε η γωνία ΓΒx να είναι 30°. Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βx στο σημείο Ρ.



Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΓ = R.

Μονάδες 5

β. $\frac{(\text{ΡΒΓ})}{(\text{ΡΑΓ})} = 4.$

Μονάδες 10

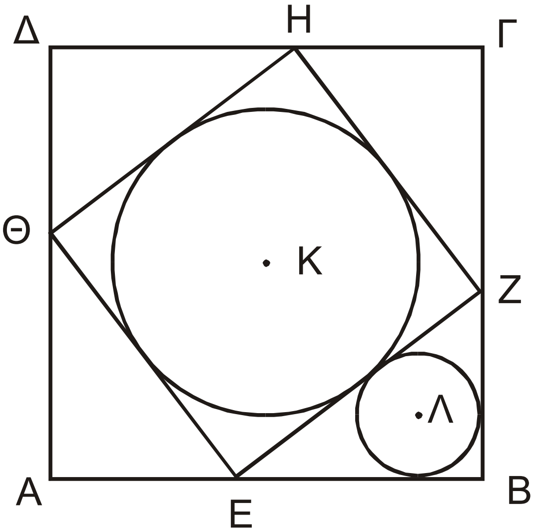
γ. $\text{ΡΓ} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι, ώστε:
ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3 cm.

Β΄ ΤΑΞΗ



α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι $\rho = 1$cm.

Μονάδες 12

γ. Εάν (K, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (K, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ).

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η τιμή κάθε μεγέθους που αναφέρεται στη στήλη **Ι** του πίνακα που ακολουθεί, δίνεται με έναν από τους τύπους που υπάρχουν στη στήλη **ΙΙ**.

ΣΤΗΛΗ Ι	**ΣΤΗΛΗ ΙΙ**
Α. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	1. $2\pi R$
	2. πR^2
Β. Μήκος κύκλου ακτίνας R	3. R^2
Γ. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° σε κύκλο ακτίνας R	4. $\frac{\pi R \mu}{180}$
Δ. Μήκος τόξου μ° σε κύκλο ακτίνας R	5. $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$
	6. $2\pi R^3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης **Ι** και, ακριβώς δίπλα, τον αριθμό της στήλης **ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 16

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη* **Σ**, *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* **Λ**, *αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1) Το εμβαδόν τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Μονάδες 1,5

2) Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 1,5

3) Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Μονάδες 1,5

4) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ με αντίστοιχα μήκη πλευρών α, β, γ ισχύει: $\alpha^2 < \beta^2+\gamma^2$

Μονάδες 1,5

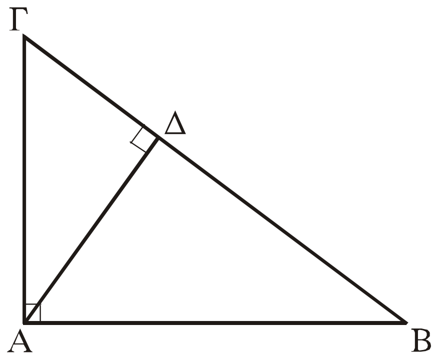
5) Η κεντρική γωνία ω_ν ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$.

Μονάδες 1,5

6) Το μήκος λ_6 της πλευράς κανονικού εξαγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, δίνεται από τον τύπο $\lambda_6=R$.

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 2ο



Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (του παρακάτω σχήματος) με κάθετες πλευρές ΑΒ=40, ΑΓ=30 και ότι ΑΔ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

Να βρείτε :

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 6

β. το μήκος του ύψους ΑΔ

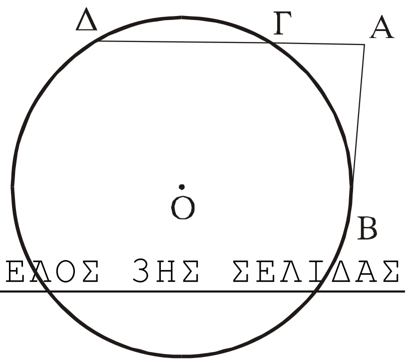
Μονάδες 9

γ. το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΓ πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R=10. Το τμήμα ΑΒ μήκους $\sqrt{96}$ εφάπτεται στο σημείο Β του



κύκλου (O,R). Το τμήμα ΑΓ της τέμνουσας ΑΓΔ έχει μήκος 6.

Α. Να αποδείξετε ότι η ΓΔ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R).

Μονάδες 10

Β. Στο κανονικό εξάγωνο με πλευρά τη ΓΔ να βρείτε:

α. Το απόστημα $α_6$

Μονάδες 5

β. Το εμβαδόν $Ε_6$

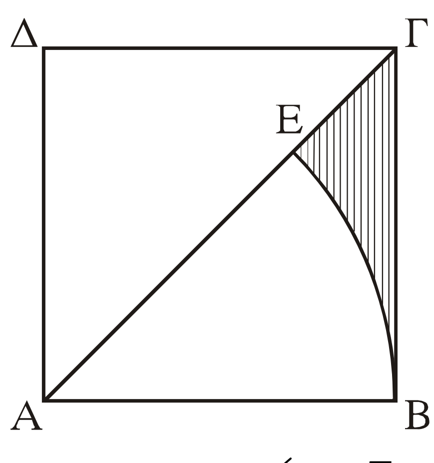
Μονάδες 5

γ. Τη γωνία $φ_6$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, του οποίου το μήκος της διαγωνίου ΑΓ είναι $6\sqrt{2}$. Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο κύκλου που



τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

Να βρείτε :

α. το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ

Μονάδες 5

β. το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΒΕ}$

Μονάδες 7

γ. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Α\overset{\frown}{ΒΕ}$ και

Μονάδες 7

δ. το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλογράμμου τριγώνου ΕΒΓ .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ένας κύκλος (O,R).

α. Στον κύκλο (O,R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***"Σωστό"*** *αν η πρόταση είναι σωστή και* ***"Λάθος"*** *αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

γ. Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,R) ορίζεται με τον τύπο:

$\Delta^{P}_{(O,R)} = R^2 + OP^2$.

Μονάδες 2

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=1 και ΒΓ= $\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

α. τη γωνία $\hat{A}$

Μονάδες 9

β. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 9

γ. τη διάμεσο ΒΜ = μ_β .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει $\beta^2+\gamma^2=3\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε,

α. να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α

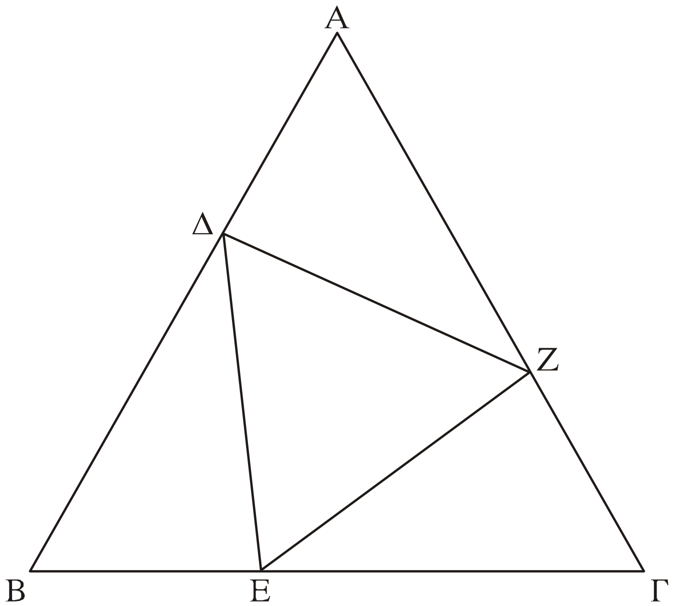
Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι $AM \cdot AE = \dfrac{3\alpha^2}{2}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρί-γωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντί-στοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι $A\Delta = BE = \Gamma Z = \dfrac{1}{3}\alpha$, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α:

α. του τριγώνου ΑΔΖ

Μονάδες 9

β. του τριγώνου ΔΕΖ

Μονάδες 7

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Μονάδες 9

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 11

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της* ***Στήλης Ι*** *και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της* ***Στήλης ΙΙ*** *που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
α. Εμβαδόν τραπεζίου	**1.** Ε = τρ
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E=\frac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E=\frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$
	4. $E=\frac{1}{2}\mathbf{P}_\nu \alpha_\nu$
	5. $E=\alpha\upsilon_\alpha$

Στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν δύο τύποι.

Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***"Σωστό"***, *αν η*

*πρόταση είναι σωστή, και **"Λάθος"**, αν η πρόταση είναι*
λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε
πρόταση.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$$

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και
απόστημα α_ν ισχύει η σχέση:

$$\alpha_\nu{}^2 + \frac{\lambda_\nu{}^2}{2} = R^2 .$$

γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του
που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο
των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου
ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που
περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το
μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε
κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R. Αν η γωνία του
πολυγώνου είναι $\varphi_\nu = 150^\circ$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν .

Μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών γ=2,

β=1+ $\sqrt{2}$ και εμβαδόν (ΑΒΓ) = $\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς α = $\sqrt{3}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

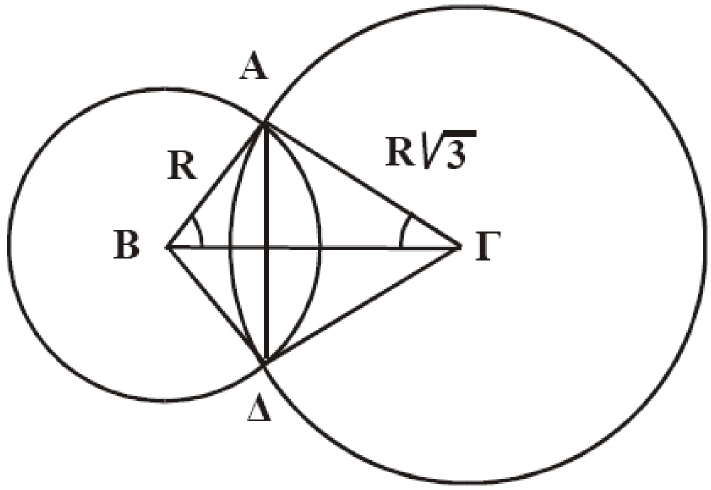
γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) με μήκη πλευρών

ΑΒ=R και ΑΓ= $R\sqrt{3}$.Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, $R\sqrt{3}$).



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 8

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.

Μονάδες 9

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ***Β, Γ, Δ, Ε*** *και* ***ΣΤ*** *να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη* **(Σ)**, *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* **(Λ)**, *αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Β. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 3

Γ. Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Μονάδες 3

Δ. Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και α, β, γ τα μήκη των πλευρών του.

Μονάδες 3

Ε. Για την πλευρά λ_3 ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισχύει $\lambda_3 = R\sqrt{5}$.

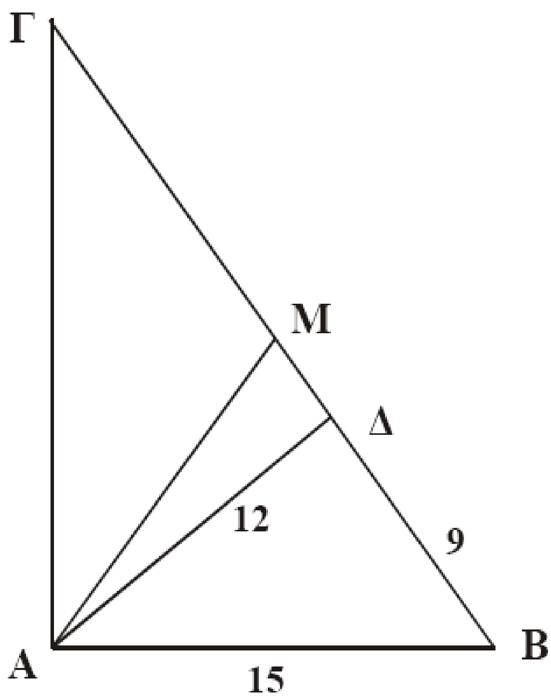
Μονάδες 3

ΣΤ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2°

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ,
ΑΒ = 15, το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ του τριγώνου και
το σημείο Δ της ΒΓ, για το οποίο ισχύει: ΑΔ = 12, ΒΔ = 9.



α. Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

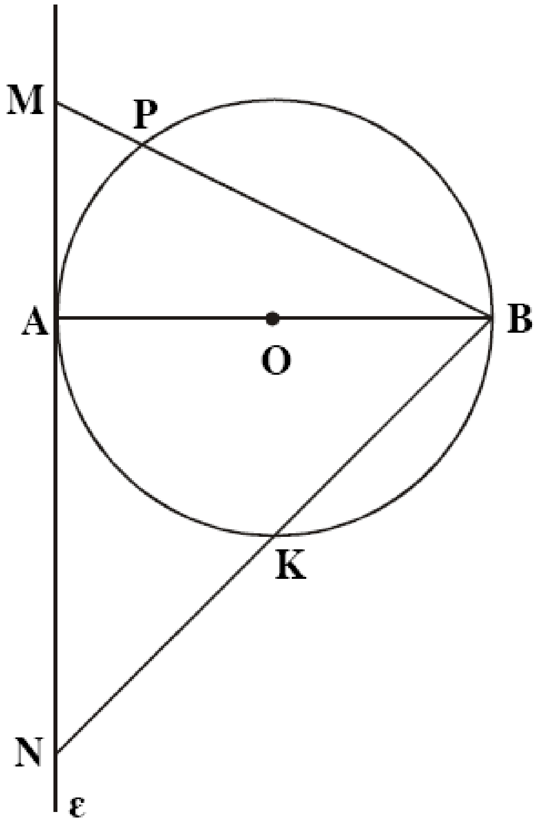
Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΔ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος (O,R). Η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.



Εκατέρωθεν του Α θεωρούμε τα σημεία Μ, Ν της ευθείας ε.
Αν οι ΒΜ, ΒΝ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ρ, Κ αντίστοιχα, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $MB^2 - AB^2 = MP \,.\, MB$.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι $MB^2 - NB^2 = MP \,.\, MB - NK \,.\, NB$.

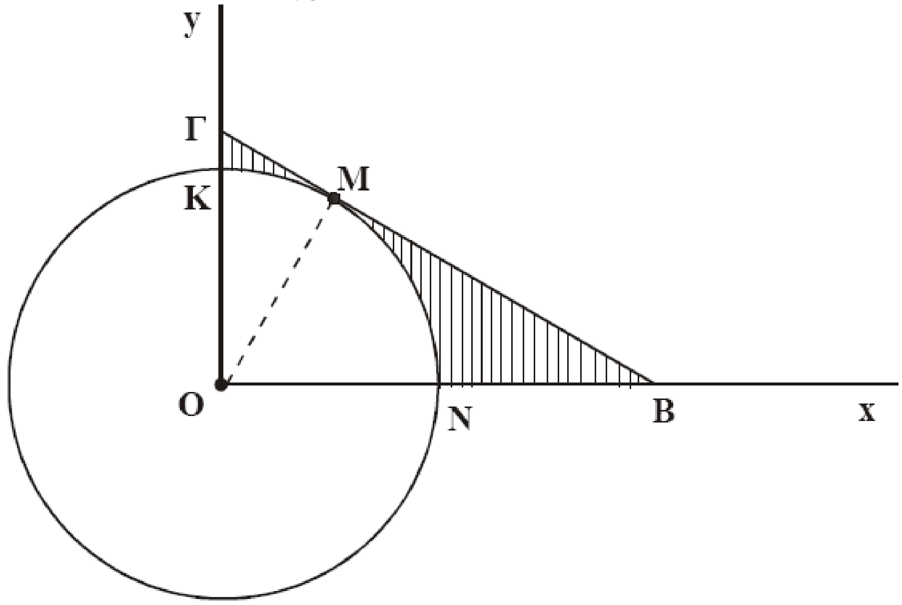
Μονάδες 7

γ. Αν ΑΜ = R και ΑΝ = 2R, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{NK^2}{MP^2}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η ορθή γωνία $\overset{\wedge}{xOy}$, ο
κύκλος (O,R), με R = 12, ο οποίος τέμνει τις πλευρές Ox, Oy
της γωνίας στα σημεία N, K αντίστοιχα και το σημείο B της
Ox, για το οποίο ισχύει OB = 24.



Αν η εφαπτομένη του κύκλου, που άγεται από το σημείο B,
εφάπτεται του κύκλου στο σημείο M και τέμνει την πλευρά
Oy στο σημείο Γ, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\overset{\wedge}{MON}$ είναι κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\overset{\frown}{OMN}$.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τριγώνου OBΓ.

Μονάδες 15