Θέματα Μαθηματικών
Θετικής Κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου 1999

Ζήτημα 1ο

Α. Έστω

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

(Μονάδες 3)

β) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και λ_1,λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

(Μονάδες 5,5)

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{συνθ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

(Μονάδες 4)

Β. α) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1),$$
$$\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$$

με λ ≠ 0. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

Α. λ = 1
Β. λ = 3
Γ. λ = 2
Δ. λ = -2
Ε. λ = -3

Να γράψετε στο τετραδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6,5)

β) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{u} = (1, -\sqrt{3}),$$
$$\vec{v} = (2, 2\sqrt{3}),$$
$$\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α΄με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β΄.

ΣΤΗΛΗ Α΄	ΣΤΗΛΗ Β΄
	Α. $\pi/2$
1. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	Β. $\pi/6$
	Γ. $\pi/4$
2. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	Δ. $2\pi/3$
	Ε. $3\pi/4$
3. γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	Ζ. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετραδιό σας τον αριθμό της στήλης Α΄και δίπλα το γράμμα της στήλης Β΄που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6)

Απάντηση:

Α. α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad , \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

β) Ισχύει:

$$\lambda_1 = y_1/x_1 \text{ και } \lambda_2 = y_2/x_2$$

με $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y . Είναι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

γ) Ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \text{συν}\theta \Leftrightarrow \text{συν}\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \qquad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

και

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$\text{συν}\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Β. α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα αν και μόνο αν:

$$\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 + \lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda\ (\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (απορ.) ή } \lambda = -3$$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Ε.

β) Είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1\cdot 2 + \left(-\sqrt{3}\right)\cdot 2\sqrt{3}}{2\cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{v}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{w}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{1\cdot\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right)1}{2\cdot 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Άρα:

$$\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{v},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{4\sqrt{3}}{4\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα:

$$\left(\vec{v},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, οι σωστές αντιστοιχίες είναι:

$1 \leftrightarrow \Delta \qquad 2 \leftrightarrow A \qquad 3 \leftrightarrow B.$

Ζήτημα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $α = 2κ + 2$ και $β = 6κ + 7$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2β - α)$ με το 10 είναι 2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο αριθμός $(α + β - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

α) Έχουμε: $α = 2κ + 2$, $β = 6κ + 7$, με $κ \in \mathbb{Z}$

Έστω $δ = (3α, β) \Leftrightarrow δ = (6κ + 6, 6κ + 7)$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} δ \mid 6κ+6 \\ δ \mid 6κ+7 \end{array}\right\}$$

Οπότε:

$$δ/(6κ + 7) - (6κ + 6) \Leftrightarrow δ/1, \text{ δηλαδή } δ = 1.$$

Άρα, οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2β - α = 2(6κ + 7) - (2κ + 2) &= 12κ + 14 - 2κ - 2 = 10κ + 12 = \\ &= 10κ + 10 + 2 = 10(κ + 1) + 2. \end{aligned}$$

Άρα: $2β - α = 10(κ + 1) + 2$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2β - α)$ με το 10 είναι 2.

γ) Ισχύει: $κ = πολ.7$, δηλαδή $κ = 7λ$, με $λ \in \mathbb{Z}$. Έχουμε:

$$α + β - 2 = 2κ + 2 + 6κ + 7 - 2 = 8κ + 7 = 8(7λ) + 7 = 7(8λ + 1)$$

Άρα: $α + β - 2 = 7(8λ + 1)$

Αν θέσουμε: $8λ + 1 = μ$, με $μ \in \mathbb{Z}$, τότε:

$$α + β - 2 = 7μ = πολ.7$$

Ζήτημα 3ο

Δίνονται τα σημεία Α(8, 0) και Β(0, 4) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

(Μονάδες 7)

Απάντηση:

Επειδή το σημείο Δ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_\Delta &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_\Delta &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_\Delta &= \frac{8+0}{2} = 4 \\ y_\Delta &= \frac{0+4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Δηλαδή: Δ(4, 2)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΟΔ θα είναι:

$$\lambda_{O\Delta} = \frac{y_\Delta - y_O}{x_\Delta - x_O} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Επειδή το σημείο Ο(0, 0) είναι σημείο της ευθείας ΟΔ, η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - 0 = \lambda_{O\Delta} (x - 0) \Leftrightarrow y = 1/2\ x$$

β) Αν λ_ε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε), τότε:

$$(\varepsilon) \perp O\Delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \bullet \lambda_{O\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \bullet 1/2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Επειδή το σημείο Δ(4, 2) είναι σημείο της ευθείας (ε), η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - y_\Delta = \lambda_\varepsilon (x - x_\Delta) \Leftrightarrow y - 2 = -2\ (x - 4) \Leftrightarrow y + 2x - 10 = 0$$

γ) Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$ της ευθείας (ε). Σύμφωνα με το ερώτημα β) ισχύει:

$$2x_0 + y_0 - 10 = 0 \qquad (1)$$

Πρέπει:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x_0 - 8)^2 + y_0^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_0^2 + (y_0 - 4)^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 8y_0 + 16 = 2x_0^2 + 2y_0^2 \Leftrightarrow$$

$$-16x_0 - 8y_0 + 80 = 0 \Leftrightarrow -8(2x_0 + y_0 - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 10 = 0$$

Η τελευταία ισχύει, λόγω της (1).

<u>Ζήτημα 4ο</u>

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό
$n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να δείξετε ότι:
α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

(Μονάδες 9)

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

(Μονάδες 8)

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο Α.

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

Ισχύει ότι:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1),\ n = 1, 2, 3, \ldots, 1999 \qquad (1)$$

α) Έχουμε:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2nx - 2ny + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(n + 1)x - 2ny + 1 + 2n = 0 \qquad (2)$$

Θέτουμε:

$$-2(n + 1) = A,\ -2n = B \text{ και } 1 + 2n = \Gamma.$$

Για να είναι η (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), εξίσωση κύκλου, πρέπει:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 4(n + 1)^2 + 4n^2 - 4(1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n + 1)^2 + n^2 - (1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 - 1 - 2n > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$$

Επομένως, η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο:

$$K\left(-\frac{A}{2} = n + 1,\ -\frac{B}{2} = n\right)$$

και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$$

β) Έστω Α (x_0,y_0) το σταθερό σημείο που ζητούμε. Το σημείο Α πρέπει να είναι σημείο του κύκλου C. Δηλαδή, πρέπει:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2(n+1)x_0 - 2ny_0 + 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 2n(x_0 + y_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x_0 + y_0 - 1)n + (x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1) = 0 \qquad (3)$$

Για να ισχύει η (3) για κάθε n = 1, 2, 3, …, 1999, πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r} 2(x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ -x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σημείο Α(1, 0) είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο.

γ) Έστω ε :x + y – 1 = 0 και d(K, ε) η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου C από την ευθεία (ε). Έχουμε:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1 + n + n - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2n|}{\sqrt{2}} = \frac{2n}{\sqrt{2}} = n\sqrt{2} = e$$

Επομένως, οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας (ε) και μάλιστα στο σημείο Α, αφού:

1 + 0 – 1 = 0, που ισχύει.

Θέματα Μαθηματικών
Θετικής Κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου 2000

<u>Ζήτημα 1ο</u>

Α.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ.

(Μονάδες 2)

Α.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

(Μονάδες 4,5)

Α.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 6)

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Δίνεται κύκλος
$x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του Μ(1, -3). Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

Α. $x + 3y = 10$

Β. $5x - y = 8$

Γ. $x - 3y = 10$

Δ. $3x + 2y = 3$

Ε. $(1/2)x + y = 5$

(Μονάδες 4)

Β.2. Στη στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη στήλη Β τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2+y^2-6x+4y-3=0$	**1.** K(0,-1), ρ=2
β. $x^2+(y+1)^2=4$	**2.** K(3,-2), ρ=1
	3. K(3,-2), ρ=4

(Μονάδες 4)

Β.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετραδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο (1,-1) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$ όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

(Μονάδες 4,5)

Απάντηση:

Α.1. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

Α.2. Η εξίσωση $x^2 + y^2 Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Το κέντρο του τότε είναι το:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και η ακτίνα του:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Α.3.
α) Επειδή το $A(x_1,y_1)$ είναι σημείο του κύκλου, θα ισχύει ότι:

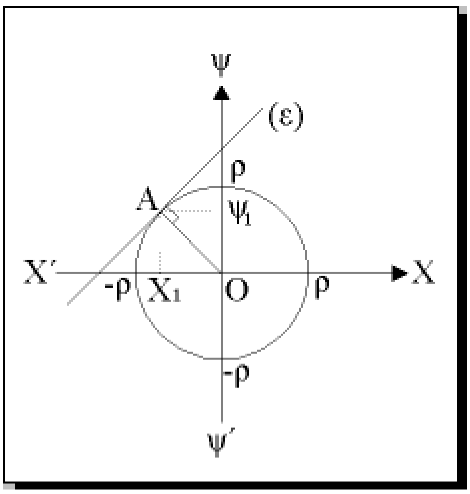
$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $A(x_1,y_1)$. Τότε:

$$(\varepsilon) \perp \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\overrightarrow{OA}} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{y_1}{x_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{y_1}{x_1}$$

για κάθε $x_1, y_1 \neq 0$.



Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α, θα έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = \lambda_\varepsilon \bullet (x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = -(x_1/y_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} yy_1 + xx_1 = \rho^2$$

β) Αν $x_1 = 0$, τότε Α(0,ρ) ή Α(0,-ρ) οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$y = \rho$ ή $y = -\rho \Leftrightarrow y \bullet \rho = \rho^2$ ή $y \bullet (-\rho) = \rho^2 \Leftrightarrow yy_1 = \rho^2$ ή $yy_1 = \rho^2$
$\Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = \rho^2$

αφού $x_1 = 0$.

γ) Αν $y_1 = 0$, τότε Α(ρ,0) ή Α(-ρ,0) οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$x = \rho$ ή $x = -\rho \Leftrightarrow x \bullet \rho = \rho^2$ ή $x \bullet (-\rho) = \rho^2 \Leftrightarrow x \bullet x_1 = \rho^2$ ή $x \bullet x_1 = \rho^2$
$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$

αφού $y_1 = 0$.

Β.1. Αφού το σημείο Μ(1,-3) επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$, η εφαπρομένη στο Μ θα έχει εξίσωση:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow x \bullet 1 + y \bullet (-3) = 10 \Leftrightarrow x - 3y = 10$$

επομένως σωστή είναι η απάντηση Γ.

Β.2.
α. Ο κύκλος με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ έχει Α = -6, Β = 4, Γ = -3, άρα:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

δηλαδή Κ(3,-2) και ακτίνα:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

β. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ έχει κέντρο Κ(0,-1) και ακτίνα ρ = 2.
Επομένως έχουμε:

$$\alpha \leftrightarrow 3 \text{ και } \beta \leftrightarrow 1$$

Β.3.

α. Το σημείο (1,-1) είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$, αφού $1^2 + (-1)^2 = 2$.

β. Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4}{5} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Επειδή έχουμε δύο λύσεις, ο κύκλος και η ευθεία τέμνονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$ γράφεται ισοδύναμα: $x^2 + y^2 = -\lambda^2 < 0$
Επομένως δεν είναι εξίσωση κύκλου.
Άρα:

α ↔ Σ β ↔ Λ γ ↔ Λ.

Ζήτημα 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6\kappa + \upsilon$, με $0 \le \upsilon \le 6$ και κ ακέραιος. Να δείξετε ότι:

α. Οι παραπάνω ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή
$\alpha = 6\kappa + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6\kappa + 5$, όπου κ ακέραιος.

(Μονάδες 10)

β. Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου μ ακέραιος.

(Μονάδες 10)

γ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Μονάδες 5)

Απάντηση:

α. Αφού $\alpha = 6\kappa + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$, έχουμε ότι:

Αν $\upsilon = 0$, $\alpha = 6\kappa = 2(3\kappa) =$ πολ2, απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 1$, $\alpha = 6\kappa + 1$.
Αν $\upsilon = 2$, $\alpha = 6\kappa + 2 = 2(3\kappa + 1) =$ πολ2, απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 3$, $\alpha = 6\kappa + 3 = 3(2\kappa + 1) =$ πολ3, απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 4$, $\alpha = 6\kappa + 4 = 2(3\kappa + 2) =$ πολ2, απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 5$, $\alpha = 6\kappa + 5$.

Επομένως $\alpha = 6\kappa + 1$ ή $\alpha = 6\kappa + 5$.

β. $\alpha = 6\kappa + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = (6\kappa + 1)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 36\kappa^2 + 12\kappa + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 3(12\kappa^2 + 4\kappa) + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\mu + 1,\ \mu = 12\kappa^2 + 4,\ \kappa \in Z.$

$\alpha = 6\kappa + 5 \Leftrightarrow \alpha^2 = (6\kappa + 5)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 36\kappa^2 + 60\kappa + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 3(12\kappa^2 + 20\kappa + 8) + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\mu + 1,$

$\mu = (12\kappa^2 + 20 + 8)\ \kappa \in Z.$

γ. $(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 5)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 5)\ (6\kappa + 5 + 6\mu + 5) =$

$= 6(\kappa - \mu)\ (6\kappa + 6\mu + 10) =$ πολ3.

$(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 1)\ (6\kappa + 5 + 6\mu + 1) =$

$= (6\kappa - 6\mu + 4)\ (6\kappa + 6\mu + 6) = 6(6\kappa - 6\mu + 4)\ (\kappa + \mu + 1) =$ πολ3

$(6\kappa + 1)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 1 - 6\mu - 1)\ (6\kappa + 1 + 6\mu + 1) =$

$= 6(\kappa - \mu)\ (6\kappa + 6\mu + 2) =$ πολ3.

<u>Ζήτημα 3ο</u>

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4,\text{-}2) \quad , \quad \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (\text{-}7,8)$$

α. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} = (\text{-}1,2)$$

και

$$\vec{\beta} = (2,\text{-}2)$$

(Μονάδες 7)

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε τα διανύσματα:

$$\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

και

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$

να είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ. Να αναλυθεί το διάνυσμα:

$$\vec{\gamma} = (3,\text{-}1)$$

σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α). Είναι:

$$\left.\begin{array}{r}2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,\text{-}2\\ \vec{\alpha}\text{ - }3\vec{\beta}=(\text{-}7,8)\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}3\vec{\alpha}=(\text{-}3,6)\Leftrightarrow\vec{\alpha}=(\text{-}1,2)$$

Τότε:

$$2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,\text{-}2)\Leftrightarrow 2(\text{-}1,2)+3\vec{\beta}=(4,\text{-}2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(4,\text{-}2)-(\text{-}2,4)\Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(6,\text{-}6)\Leftrightarrow\vec{\beta}=(2,\text{-}2)$$

β) $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\Leftrightarrow(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=0 \qquad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha}^2=(-1)^2+2^2=5$$

$$\vec{\beta}=(2)^2+(-2)^2=8$$

και

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot(-1)+2\cdot(-2)=-6$$

Τότε η (1) γίνεται:

10κ –18κ – 12 + 24 = 0 ⇔

⇔ 12 = 8κ ⇔ κ = 12/8 ⇔ κ = 3/2.

γ. Έστω τα διανύσματα $\vec{\delta},\vec{\varepsilon},$ όπου:

$$\vec{\delta}\,//\,\vec{\alpha}$$

και

$$\vec{\varepsilon}\perp\vec{\alpha}.$$

Τότε:

$$\vec{\delta}=\vec{\lambda}\,\vec{\alpha},\ \lambda\in R \quad\Leftrightarrow\ \vec{\delta}=(\text{-}\lambda,\ 2\lambda),\ \lambda\in R$$

και έστω

$$\vec{u}=(2,1)\perp\vec{\alpha}\quad(\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=0)$$

Τότε θα πρέπει:

$$\vec{u}\,//\,\vec{\varepsilon}\Leftrightarrow\vec{\varepsilon}=v\cdot\vec{u}\Leftrightarrow\vec{\varepsilon}=(2v,v),\ v\in R.$$

Ακόμη πρέπει:

$$\vec{\gamma} = \vec{\delta} + \vec{\varepsilon} \Leftrightarrow (3,-1) = (-\lambda, 2\lambda) + (2\nu, \nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -\lambda + 2\nu \\ -1 = 2\lambda + \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -2\lambda + 4\nu \\ -1 = 2\lambda + \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\nu \\ \lambda = 2\nu - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\gamma} = \vec{\delta} + \vec{\varepsilon}, \text{αν } \vec{\delta} = (1,-2), \vec{\varepsilon} = (2,1) \text{ με } \vec{\varepsilon} \perp \vec{\delta}$$

<u>Ζήτημα 4ο</u>

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

(Μονάδες 8)

β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2,2), Λ(-1,5) και Μ(1,3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.

(Μονάδες 4,5)

γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

(Μονάδες 6)

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

(Μονάδες 6,5)

Απάντηση:

α. Ο φάρος (Φ) θα είναι το σταθερό σημείο των ευθειών:

$$(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x - x + \lambda y + y - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x + y - 1) + (-x + y - 3) = 0$$

Το σταθερό σημείο (αν υπάρχει) βρίσκεται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Άρα: Φ(-1, 2).

β. ΚΦ: $y - y_Φ = λ_{ΚΦ}(x - x_Φ) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-2}{-1-2}(x+1) \Leftrightarrow y - 2 = 0$$

ΛΦ: Αφού $x_Λ = x_Φ$, τότε η εξίσωση είναι η $x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$.

ΜΦ: $y - y_Φ = λ_{ΜΦ}(x - x_Φ) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-3}{-1-1}(x+1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2y - x - 5 = 0$$

γ. $$d(K, ΦM) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d(Λ, ΦM) = \frac{|2 \cdot 5 - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Επειδή d(Λ, ΦΜ) = 2d(Κ, ΦΜ), το Κ διέρχεται πιο κοντά στη φωτεινή ακτίνα ΦΜ σε σχέση με το Λ.

δ. Επειδή ΦΛ // yy΄και ΦΜ δεν είναι παράλληλη yy΄, τα Φ, Λ, Μ δεν είναι συνευθειακά και ορίζουν το τρίγωνο ΦΛΜ. Τότε:

$$E_{ΦΛΜ} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{ΦΛ}, \overrightarrow{ΦΜ})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1-(-1) & 1-(-1) \\ 5-2 & 3-2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right| \Leftrightarrow E_{ΦΛΜ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow E_{ΦΛΜ} = 3$ τετρ. μονάδες.

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν α/β, τότε α/λβ για κάθε ακέραιο λ.

Μονάδες 4

β. Αν α/β και α/γ, τότε α/(β+γ).

Μονάδες 4

Α.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $β \neq 0$. Τότε:

α. $(α,β) \leq (β,υ)$
β. $(α,β) = (β,υ)$
γ. $(α,β) \geq (β,υ)$
δ. $(α,β) = (β,υ) + 1$

όπου (α,β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β.

Μονάδες 4,5

Β.1. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν 7 / (α+5) και 7 / (40-β) τότε:

α. 7 / (α+β),
β. 7 / (α+β+1),
γ. 7 / (α+β+2),
δ. 7 / (α+β-3).

Μονάδες 4

Β.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

Β.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο $Μ(κ,λ)$ με $κ>0$ και $λ>0$ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3,κ)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16,4λ)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο, άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Μ.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 7

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Μονάδες 6

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>να μην τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

Β. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 9

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν det $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \ .$$

γ. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει: $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$ όπου [α , β] είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και (α, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β.

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2+B^2-4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

Β΄ ΤΑΞΗ

Μονάδες 8

Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1).
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** *και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της* **Στήλης Β** *που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	**1.** $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	**2.** $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	**3.** $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} + \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	**4.** $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{\alpha\left(\alpha^2 + 1\right)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο

$\frac{\alpha\left(\alpha^2+1\right)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

Β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Μ(1,2).

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

Μονάδες 7

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Με το $\vec{\alpha}^2$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ και με το $|\vec{\alpha}|$ συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$$

Μονάδες 10

Β. *Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους* ***(Β.1, Β.2, Β.3)*** *και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=2$

β) $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$

γ) $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=-1$

δ) $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\neq 0$

Μονάδες 5

2. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

δ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$

Μονάδες 5

3. Η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο την αρχή
O(0,0) ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Oxy του επιπέδου και ακτίνα ρ είναι:

α) $(x-1)^2 + y^2 = \rho^2$

β) $x^2 + (y-1)^2 = \rho^2$

γ) $x^2 + y^2 = (\rho-1)^2$

δ) $x^2 + y^2 = \rho^2$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$, $\vec{\beta}=(5,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=3\vec{\beta}-2\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ, για την οποία το διάνυσμα $\vec{x}=(\lambda,-6)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\vec{\gamma}$, όπου $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι κύκλοι C_1 , C_2 με εξισώσεις:

C_1: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$

C_2: $(x+2\kappa)^2 + (y-\lambda)^2 =25$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο K_1 (2,1) και ακτίνα $\rho_1=2$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ έτσι ώστε οι κύκλοι C_1 και C_2 να έχουν το ίδιο κέντρο.

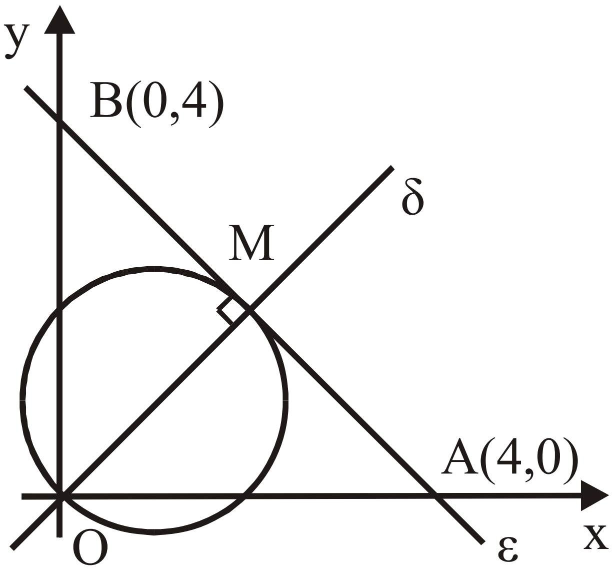
Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε, αν τα σημεία Α(4,1), Β(1,1) ανήκουν στον κύκλο C_1.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxy του παρακάτω σχήματος, δίνονται τα σημεία Α(4,0) και Β(0,4), η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ε.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι x+y=4.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών δ και ε.

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{\nu}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\alpha}\vec{\nu}$, τότε να αποδείξετε ότι

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\alpha}\vec{\nu}$.

Μονάδες 7

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ \vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy+x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(–γ,0), Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.

Μονάδες 2

δ. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

Μονάδες 2

Γ. **α.** Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με β ≠ 0, πότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha\in\mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή

$\alpha^3=8k$ όπου $k\in\mathbf{Z}$ ή $\alpha^3=2k+1$ όπου $k\in\mathbf{Z}$.

Μονάδες 12

Β. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Β. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0,\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$ και $E'\left(0,-\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $Κ\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $Λ\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $Κ\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται δύο σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Μονάδες 15

Β. *Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους* ***(Β.1, Β.2, Β.3*** *και* ***Β.4)*** *και, δίπλα ακριβώς, την ένδειξη* ***(Σ)****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***(Λ)****, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0, όπου Α, Β, Γ $\in$ IR , παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή του επιπέδου.

2. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

3. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O η εξίσωση $x^2 = 2py$ με $p \neq 0$ παριστάνει παραβολή, με κορυφή το σημείο O.

4. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία A(1, 1), B(2μ + 1, λ – 2), Γ(4, 0) και M(3, 2), όπου M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Gamma M}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|\vec{\Gamma A}| = |\vec{\Gamma B}|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 5, \qquad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 10

β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) .

Μονάδες 6

γ) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με εξίσωση $y = x$ και του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς- Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση M του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι:

$M(2 + \kappa t, \lambda + 2t)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 5$ το πλοίο διέρχεται από το σημείο $A(7, 13)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ .

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) : $y = 2x - 1$.

Μονάδες 10

γ) ΄Ενα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>δεν θα τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.</u>

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.

Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 29 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$$

Μονάδες 10

Β. Έστω δύο σημεία Ε και Ε΄ ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ στο συγκεκριμένο επίπεδο ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $Α \neq 0$ ή $Β \neq 0$, η εξίσωση $Αx + Βy + Γ = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

β. Στην παραβολή $y^2=2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$

Μονάδες 2

γ. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, k, λ με α ≠ 0.
Αν α/β και α/γ, τότε α/(kβ +λγ) .

Μονάδες 2

δ. Αν Α, Β, Γ είναι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε
το εμβαδόν του είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}})\right|$$

Μονάδες 2

ε. Η εκκεντρότητα ε της έλλειψης είναι μεγαλύτερη
της μονάδας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1\ ,\ 2)$ και $\vec{\beta} = (2\ ,\ 3)$

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον αριθμό k€IR, ώστε το διάνυσμα $\vec{\upsilon}=(k^2-k,k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

Μονάδες 9

Β΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha=12k-5$, όπου $k€Z$.
Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=(\alpha^2+15)(\alpha^2-1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε_1: $3x+4y+6=0$ και ε_2: $3x+4y+16=0$.
Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα x΄x και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d=4\sqrt{3}$.

Μονάδες 10

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της* **Στήλης Ι** *του παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της* **Στήλης ΙΙ**, *έτσι ώστε να προκύπτει η σωστή αντιστοίχιση. (Δύο στοιχεία της* **Στήλης ΙΙ** *περισσεύουν).*

Στήλη Ι **Είδος κωνικής τομής**	**Στήλη ΙΙ** **Εξίσωση γραμμής**
α. Παραβολή	**1.** $x^2+y^2=\rho^2$
β. Κύκλος	**2.** $x+y=\alpha$, $\alpha\neq 0$
γ. Υπερβολή	**3.** $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, α , β >0
δ. Έλλειψη	**4.** $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, α , β >0
	5. $y^2=2px$, p>0
	6. $x^3=\beta y^2$, $\beta\neq 0$

Γ΄ ΤΑΞΗ

*Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις **Β.** και **Γ.** , να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν αυτή είναι **Σωστή** ή **(Λ)**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη.***

Β. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, που σχηματίζουν γωνία θ, τότε ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\ .$$

Μονάδες 3

Γ. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι:

$$y = \lambda x + \beta,\ \mu\varepsilon\ \beta \neq 0\ .$$

Μονάδες 3

Δ. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\vec{\alpha}\,(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική ιδιότητα).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2, με εξισώσεις ε_1: $3x - 2y + 1 = 0$ και ε_2 : $2x + 3y - 8 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 .

Μονάδες 5

β) Υποθέτουμε ότι το σημείο Α(α,2) ανήκει στην ευθεία $ε_1$
και το σημείο Β(−5, β) ανήκει στην ευθεία $ε_2$.

β₁) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Μονάδες 6

β₂) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(α, β) ανήκει στην ευθεία με εξίσωση 3x − y + 3 = 0.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=3 \ , \ |\vec{\beta}|=2 \ , \ (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3} \text{ και } \vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει η σχέση $\left(\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}-x\vec{\beta}\right)=17$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in IR$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(2, λ) και ακτίνα ρ = $\sqrt{\lambda^2+4}$

Μονάδες 5

γ) Για λ = 2, να αποδείξετε ότι ο κύκλος, που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y σε σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή Ο, τέτοια ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

δ) Για λ = 2, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση y = - x εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1), στο σημείο Ο(0, 0).

Μονάδες 7

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>δεν θα τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.</u> Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε <u>**στο τετράδιό σας σε όλα**</u> τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.