

# Πειραματική μελέτη των ευθύγραμμων κινήσεων

## Προβλήματα και Θεραπείες

### Τα προβλήματα

#### α' περίπτωση:

Υποθέτουμε ότι ένα αυτοκίνητο κινείται σύμφωνα με την εξίσωση:  $x = 2 \cdot t + 1$ .

Κάθε δευτερόλεπτο καταγράφουμε τη θέση του και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x (m)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών με τις μετατοπίσεις και τα χρονικά διαστήματα.

x (m)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x$ (m)		2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\Delta t$ (s)		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα.

x (m)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x$ (m)		2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\Delta t$ (s)		1	1	1	1	1	1	1	1	1
$v$ (m/s)		2	2	2	2	2	2	2	2	2

#### Παρατηρήσεις:

1. Δεν γίνεται σαφές που αναφέρονται οι διαφορές χρόνων και θέσεων με την πρώτη ματιά.
2. Έτσι όπως είναι δομημένος ο πίνακας φαίνεται ότι η μέση ταχύτητα είναι στιγμιαία ταχύτητα.
3. Οι μαθητές παραξενεύονται με τις κενές θέσεις του πίνακα.

## Πρόταση θεραπείας

Ο πίνακας να κατασκευάζεται με τον παρακάτω τρόπο:

x (m)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x$ (m)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\Delta t$ (s)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
u (m/s)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

## β1' περίπτωση:

Υποθέτουμε ότι ένα αυτοκίνητο κινείται σύμφωνα με την εξίσωση:  $x = t^2 + 1$ .

Κάθε δευτερόλεπτο καταγράφουμε τη θέση του και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

Στην παραδοσιακή αντιμετώπιση η διάταξη είναι:

x (m)	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δx (m)		1	3	5	7	9	11	13	15	17
Δt (s)		1	1	1	1	1	1	1	1	1
υ (m/s)		1	3	5	7	9	11	13	15	17
Δυ (m/s)			2	2	2	2	2	2	2	2
Δt' (s)			1	1	1	1	1	1	1	1
α (m/s <sup>2</sup> )			2	2	2	2	2	2	2	2

## Παρατηρήσεις:

- Το Δυ είναι διαφορά μέσων ταχυτήτων, ενώ θα πρέπει να είναι διαφορά στιγμιαίων ταχυτήτων.
- Γιατί το Δt' είναι 1 s; Για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας είναι σωστό, ενώ για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης δεν είναι.

Τα παραπάνω ερωτήματα γίνονται καθαρότερα, αν χρησιμοποιηθεί η διάταξη που προτάθηκε παραπάνω για την παρουσίαση των μετρήσεων.

x (m)	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δx (m)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
Δt (s)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
υ (m/s)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
Δυ (m/s)		2	2	2	2	2	2	2	2	
Δt' (s)		;	;	;	;	;	;	;	;	

## β2' περίπτωση:

Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο κινείται πάλι σύμφωνα με την εξίσωση:  $x = t^2 + 1$ , αλλά αυτή τη φορά τοποθετούμε χρονόμετρα στις θέσεις 1 m, 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m, 8 m, 9 m και 10 m και μετράμε τις χρονικές στιγμές που βρίσκεται στις θέσεις αυτές. Οι μετρήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x (m)	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
t (s)	0	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000
Δx (m)		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Δt (s)		1,000	0,414	0,318	0,268	0,236	0,213	0,196	0,183	0,172
υ (m/s)		1,000	2,414	3,146	3,732	4,236	4,686	5,095	5,474	5,828
Δυ (m/s)			1,414	0,732	0,586	0,504	0,449	0,410	0,379	0,354
Δt' (s)			;	;	;	;	;	;	;	;
α (m/s <sup>2</sup> )			;	;	;	;	;	;	;	;

### Ερώτηση:

- Εδώ ποιο Δt' θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την επιτάχυνση;

Ανάλογα ισχύουν και με τη χρήση της άλλης διάταξης για την παρουσίαση των μετρήσεων.

x (m)	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
t (s)	0	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000
Δx (m)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Δt (s)	1,000	0,414	0,318	0,268	0,236	0,213	0,196	0,183	0,172	
υ (m/s)	1,000	2,414	3,146	3,732	4,236	4,686	5,095	5,474	5,828	
Δυ (m/s)		1,414	0,732	0,586	0,504	0,449	0,410	0,379	0,354	
Δt' (s)		...	...	...	...	...	...	...	...	...
α (m/s <sup>2</sup> )		...	...	...	...	...	...	...	...	...

**Προφανώς εδώ έχουμε μια πολύ δυσάρεστη κατάσταση!!!**

## Πρόταση θεραπείας

Από το θεώρημα της μέσης τιμής ισχύει ότι, αν μία συνάρτηση  $f(t)$  είναι συνεχής και μονότονη στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ , τότε υπάρχει ένα  $t_0$  που ανήκει σ' αυτό το διάστημα για το οποίο ισχύει:

$$f'(t_0) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

όπου  $f'(t_0)$  η τιμή της παραγώγου της  $f(x)$  στο σημείο  $t_0$ .

Αν σχετίσουμε τη συνάρτηση  $f(t)$  με την συνάρτηση θέσης  $x(t)$  ενός κινητού, αναγνωρίζουμε το δεύτερο μέλος της σχέσης (1) σαν την μέση ταχύτητά του κατά το χρονικό διάστημα  $[t_1, t_2]$ . Φυσικά η τιμή  $f'(t_0)$  είναι η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά την χρονική στιγμή  $t_0$ .

**Τα καλά νέα λοιπόν είναι ότι η μέση ταχύτητα ενός κινητού σε κάποιο χρονικό διάστημα είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα που έχει κάποια χρονική στιγμή μέσα σ' αυτό το χρονικό διάστημα.**

Για την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ισχύουν:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

και

$$x'(t) = a \cdot t \quad (3)$$

Με αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1) έχουμε:

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (4)$$

**Βλέπουμε λοιπόν, ότι στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η μέση ταχύτητα σε ένα χρονικό διάστημα, είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα στη μέση αυτού του χρονικού διαστήματος.**

Παίρνοντας υπόψη τα προηγούμενα οι πίνακες των περιπτώσεων β1 και β2 γίνονται:

### Περίπτωση β1

x (m)	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta x$ (m)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
$\Delta t$ (s)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
u (m/s)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
t' (s)	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	
$\Delta u$ (m/s)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
$\Delta t'$ (s)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
$\alpha$ (m/s <sup>2</sup> )	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

### Περίπτωση β2

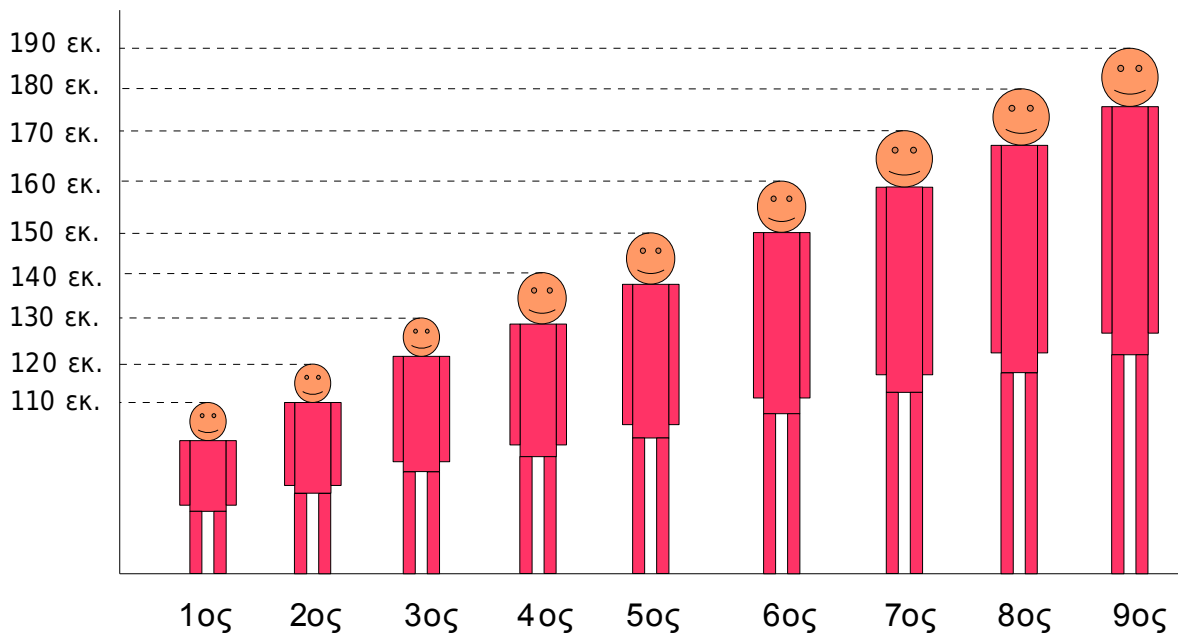
x (m)	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
t (s)	0	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000
$\Delta x$ (m)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\Delta t$ (s)	1,000	0,414	0,318	0,268	0,236	0,213	0,196	0,183	0,172	
u (m/s)	1,000	2,414	3,146	3,732	4,236	4,686	5,095	5,474	5,828	
t' (s)	0,500	1,207	1,573	1,866	2,118	2,343	2,548	2,737	2,914	
$\Delta u$ (m/s)	1,414	0,732	0,586	0,504	0,449	0,410	0,379	0,354		
$\Delta t'$ (s)	0,707	0,366	0,293	0,252	0,225	0,205	0,189	0,177		
$\alpha$ (m/s <sup>2</sup> )	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	

Όπου t' η χρονική στιγμή στη μέση του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος.

## Διδακτικές προσεγγίσεις

Η χρήση του πίνακα τιμών όπως προτείνεται παραπάνω, είναι πιο φιλική στους μαθητές γιατί κάνει πιο φανερούς τους υπολογισμούς των φυσικών μεγεθών.

Για την ισότητα της μέσης ταχύτητας και της στιγμιαίας ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα της μέσης τιμής, στους μαθητές που το γνωρίζουν, ενώ για τους μικρότερους μαθητές μπορούμε να επικαλεστούμε ανάλογες οικείες καταστάσεις, όπως για παράδειγμα το γεγονός ότι, **αν σε μια ομάδα μαθητών το ύψος μεταβάλλεται κατά σταθερή ποσότητα, τότε ο μέσος όρος του ύψους της ομάδας θα είναι όσο το ύψος του μεσαίου μαθητή.**



Μέσος όρος του ύψους: 150 εκ.

Ύψος του μεσαίου (5ου) μαθητή: 150 εκ.

Τέλος όσο αφορά τις τυχαίες ευθύγραμμες κινήσεις, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στα χρονικά διαστήματα που μεσολαβούν ανάμεσα στις μετρήσεις, η ταχύτητα μεταβάλλεται περίπου ομαλά και να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία στην επεξεργασία των μετρήσεων.