ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α. Τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε και E'.

Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$.

Μονάδες 3

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Μονάδες 3

γ) Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι κάθετο στην ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$.

Μονάδες 3

δ) Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ είναι εξίσωση κύκλου για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών Α, Β, Γ.

Μονάδες 3

ε) Η ευθεία $2x+3y+5=0$ διέρχεται από το σημείο $A(-1,-1)$.

Μονάδες 3

Θέμα 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι μη μηδενικά.

Μονάδες 6

Αν ισχύει ακόμα $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ τότε

β) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 7

Θέμα 3

Δίνονται η ευθείες $\varepsilon_1 : \alpha x - 5y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 3y - 7 = 0$ με α πραγματικό αριθμό. Δίνεται ακόμη ότι η ε_1 διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

α) Να δείξετε ότι α = 2.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $\varepsilon_3 : 4x - y + 3 = 0$

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_4) που διέρχεται από το σημείο τομής των

ε_1, ε_2 και είναι κάθετη στην ε_3.

Μονάδες 5

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ε_3 με τους άξονες.

Μονάδες 5

Θέμα 4

Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 - 4x = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C που εφάπτονται στον C_1 εξωτερικά και διέρχονται από το σημείο Α(-2,0) ανήκουν σε κλάδο υπερβολής της οποίας να βρείτε την εξίσωση

Μονάδες 15

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
3. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής Οι Εισηγητές

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΕΡΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α. Ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε και $\text{Ε}'$ το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε και $\text{Ε}'$ είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $\text{ΕΕ}'$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Σωστή.
β) Σωστή
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστή

Θέμα 2

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Αν $\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$ άτοπο γιατί διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του δεν είναι παράλληλα αφού $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

β) Είναι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\frac{2\pi}{3}=1\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}.$$

Και

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\vec{\beta}^2$$

$$=2\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\vec{\beta}^2=2\cdot 1^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)-4\cdot 1^2=-3$$

γ) Είναι $|\vec{u}|^2=\left|2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+16\vec{\beta}^2$

$$= 4\cdot 1^2 + 16\left(-\frac{1}{2}\right) + 16\cdot 1^2 = 12.$$

Άρα $|\vec{u}| = \sqrt{12}$.

Και $|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 3$.

Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{3}$.

δ) Είναι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ άρα $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Θέμα 3

α) Το Α(1,1) είναι σημείο της ε_1 άρα την επαληθεύει. Οπότε

$$\alpha\cdot 1 - 5\cdot 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

β) Για να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών λύνομε το σύστημά τους

$$\begin{cases} \varepsilon_1 : 2x - 5y + 3 = 0 \\ \varepsilon_2 : x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 : 2x - 5y + 3 = 0 \\ \varepsilon_2 : -2x + 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $y = -17$ και $x = -44$. Άρα οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A(-44,-17)$.

γ) Είναι $\varepsilon_3 : 4x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 4x + 3$. Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_3 είναι $\lambda_{\varepsilon_3} = 4$.

ε) Είναι $\lambda_{\varepsilon_4}\cdot\lambda_{\varepsilon_3} = -1$ άρα $\lambda_{\varepsilon_4} = -\frac{1}{4}$. Οπότε η εξίσωση της ε_4 είναι

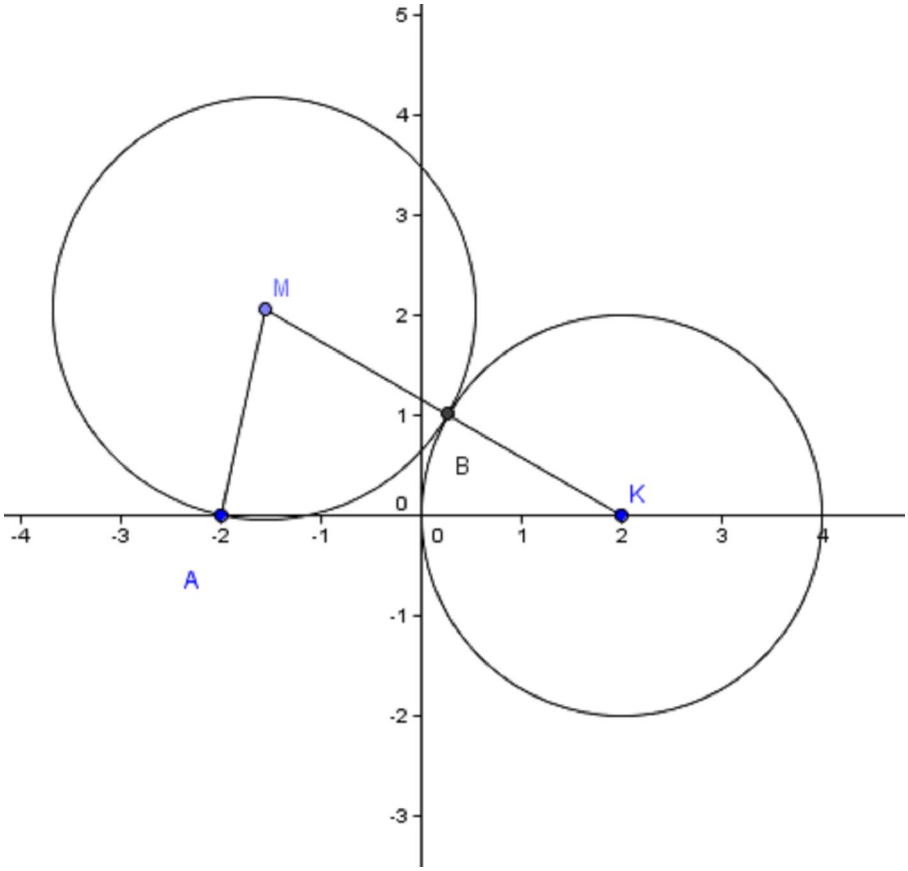
$$\varepsilon_4 : y + 17 = -\frac{1}{4}(x + 44)$$

Δίνονται η ευθείες $\varepsilon_1 : \alpha x - 5y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 3y - 7 = 0$ με α πραγματικό αριθμό. Δίνεται ακόμη ότι η ε_1 διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

ε) Για $x = 0$ η εξίσωση της ε_3 δίνει $y = 3$. Άρα η ε_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 3 και για $y = 0$ δίνει $x = -\frac{3}{4}$. Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $-\frac{3}{4}$. Οπότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{3\cdot\frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{8}$.

Θέμα 4

α) Η εξίσωση του κύκλου γίνεται $C_1 : x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$ άρα ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο Κ(2, 0) και ακτίνα 2.



Είναι $MK - MA = M\Delta + \Delta K - M\Delta = K\Delta = 2$. Άρα τα σημεία Μ βρίσκονται σε υπερβολή για την οποία είναι $2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $2\gamma = 4 \Leftrightarrow \gamma = 2$. Οπότε $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \sqrt{3}$. Επομένως το Μ είναι σημείο του αριστερού σκέλους της υπερβολής $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ γιατί $MK > MA$.