Αξιοποίηση του Sketchpad για τη δημιουργία και εξερεύνηση του κόσμου των φράκταλς

Μπάμπης Τουμάσης
Νόρμαν 33-35
26223, Πάτρα
τηλ: 2610-455003

Τάσος Αρβανίτης
Παμίσου 26
26442, Πάτρα
τηλ: 2610-428565

Στην εργασία αυτή συζητάμε πρώτα κάποια χαρακτηριστικά των φράκταλς και περιγράφουμε με πολύ απλούς όρους μερικές από τις ιδιότητές τους. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες ιδέες και υποδείξεις για την κατασκευή διαφόρων τύπων απλών φράκταλς αξιοποιώντας κάποιες εντολές του γεωμετρικού λογισμικού Geometer's Sketchpad, όπως αρχεία εντολών και μετασχηματισμούς. Όλες αυτές οι ιδέες και υποδείξεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να βοηθήσουν τους μαθητές, καθώς επίσης και καθηγητές των μαθηματικών σε επιμορφωτικά προγράμματα, να δημιουργήσουν και να εξερευνήσουν δικές τους εικόνες φράκταλς με την βοήθεια του Geometer's Sketchpad.

Εισαγωγή

Ο όρος «φράκταλ»(fractal) επινοήθηκε το 1975 από το μαθηματικό Benoit Mandelbrot και προέρχεται από τη λατινική λέξη fractus που σημαίνει σπασμένο-ακανόνιστο και όχι από τη λέξη fractional (κλασματικό), όπως συνήθως αναφέρεται από πολλούς. Σύμφωνα με το μαθηματικό ορισμό που έδωσε ο Mandelbrot, φράκταλ είναι ένα σύνολο για το οποίο η διάσταση Housdorff-Besicovich υπερβαίνει αυστηρά την τοπολογική διάσταση.

Βεβαίως, ο ορισμός αυτός είναι πολύ φορμαλιστικός και αφηρημένος. Με απλούς όρους, φράκταλς ονομάζουμε τα γεωμετρικά σχήματα που η δομή τους επαναλαμβάνεται σε ολοένα μικρότερες ή μεγαλύτερες κλίμακες, δηλαδή εμφανίζουν αυτό-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας. Σε πολλές περιπτώσεις ένα φράκταλ μπορεί να δημιουργηθεί από ένα πρότυπο, το οποίο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας
([2], [4]).

Οι ιδέες που οδήγησαν στην έννοια του φράκταλ, και στη φράκταλ γεωμετρία γενικότερα, έχουν τις ρίζες τους στην αρχαιότητα. Οι εννοιολογικές ρίζες των φράκταλς ανιχνεύονται στις προσπάθειες να μετρηθεί το μέγεθος των γεωμετρικών αντικειμένων, για τα οποία οι παραδοσιακοί ορισμοί που βασίζονταν στην ευκλείδεια γεωμετρία ή τον απειροστικό λογισμό αποτύγχαναν να δώσουν ικανοποιητικά αποτελέσματα ([11], [12]).

Για τον περισσότερο κόσμο, η αντίληψη του φράκταλ δεν προέρχεται από τη γνώση των μαθηματικών τους αλλά από κάποιες απλοποιημένες καταστάσεις -συνήθως από τη φύση- οι οποίες παρουσιάζουν «φρακταλική» δομή. Πράγματι, πολλά πράγματα γύρω μας εμφανίζουν αυτό-ομοιότητα: Από τις διακλαδώσεις των δέντρων και τις ακτές μιας παραλίας μέχρι τους βρογχικούς σωλήνες του πνεύμονα και από τη δομή του ανθρώπινου εγκεφάλου μέχρι τα σύννεφα, τα σφουγγάρια και το κουνουπίδι. Πίσω από την πολυπλοκότητα πολλών φυσικών αντικειμένων και φαινομένων κρύβονται κάποια πρότυπα-μοτίβα που επαναλαμβάνονται σε διαφορετικές κλίμακες, μέσω συγκεκριμένων αλγορίθμων, συνθέτοντας έτσι την ολική εικόνα του αντικειμένου ή φαινομένου ([1], [5]).

Σήμερα η έννοα του φράκταλ και της αυτό-ομοιότητας βρίσκεται στο επίκεντρο όλο και περισσότερων μελετών και θεωρείται ότι, σε συνδυασμό με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ερευνητικά εργαλεία για τη μελέτη του κόσμου και των φυσικών φαινομένων [7].

Πέρα όμως από την επιστημονική καθαρά αξία, λόγω του σημαντικού ρόλου που υπόσχεται μελλοντικά να παίξει στην εξέλιξη των επιστημών, ο κλάδος της φράκταλ γεωμετρίας έχει ήδη αποκτήσει πολλούς θαυμαστές γιατί απηχεί σε μια γεωμετρική διαίσθηση, που όλοι λίγο-πολύ διαθέτουμε και επειδή γοητεύει την αισθητική μας με ελκυστικές-πανοραμικές εικόνες και σχέδια. Η αλματώδης ανάπτυξη των γραφικών υπολογιστή τα τελευταία 10 χρόνια έδωσε τη δυνατότητα να γίνουν ορατές εικόνες φράκταλ εξωτικής ομορφιάς και απαράμιλλου κάλους, που εντυπωσιάζουν και εκστασιάζουν τον παρατηρητή και του δημιουργούν την αίσθηση ότι βρίσκεται πάνω στο σύνορο ανάμεσα σ’ έναν ιδεατά απλό κόσμο και στην πολύπλοκη πραγματικότητα που μας περιβάλει [6].

Παιδαγωγική αξιοποίηση των φράκταλς

Λόγω ακριβώς αυτής της αισθητικής απήχησης και των παράξενων ιδιοτήτων που παρουσιάζουν, τα φράκταλς είναι δυνατόν να εντυπωσιάσουν τους μαθητές και να αποτελέσουν μια θεματική ενότητα, η οποία αφενός μεν θα συμβάλει στο να εκτιμήσουν την ομορφιά των μαθηματικών ως κουλτούρα στο σύγχρονο κόσμο και αφετέρου θα λειτουργήσει ως μια ευχάριστη ανάπαυλα από την καθημερινή ρουτίνα του παραδοσιακού διδακτικού προγράμματος. Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν παραδοσιακές περιοχές των μαθηματικών με μια νέα προσέγγιση, να κάνουν συσχετισμούς ανάμεσα στα μαθηματικά και στο φυσικό και ανθρώπινο κόσμο και να εξερευνήσουν τα μαθηματικά με μη αναλυτικούς τρόπους. Η γεωμετρία των fractals μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συσχετίσει περιοχές των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα την έννοια του μήκους ή του εμβαδού με τις προόδους και την έννοια του ορίου, η οποία έρχεται με φυσιολογικό τρόπο μέσα από συγκεκριμένες διαπιστώσεις.

Η διδασκαλία ορισμένων απλών στοιχείων της φράκταλ γεωμετρίας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα νέο και πρωτόγνωρο αντικείμενο, που προσφέρει μια ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν τη δημιουργική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης και υπόσχεται ευχάριστες εκπλήξεις [9]. Σε συνδυασμό μάλιστα με τη χρήση ενός γεωμετρικού υπολογιστικού προγράμματος, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν φανταστικές εικόνες που δεν έχουν δει ποτέ πριν και να μελετήσουν ιδιότητες που προξενούν έκπληξη. Οι δημιουργικές δυνατότητες είναι πολύ μεγάλες και η ευκαιρία που προσφέρεται σ' αυτούς να προσεγγίσουν και να μετρήσουν τον κόσμο διαφορετικά, μοναδική.

Ενώ πολλά φράκταλς είναι πολύπλοκα μαθηματικά αντικείμενα, σύνολα σημείων στις γραφικές παραστάσεις κάποιων εξισώσεων σε υπολογιστικά προγράμματα, κάποια άλλα είναι αρκετά απλά για να κατασκευαστούν ακόμη και με το χέρι. Για να κάνουμε αυτές τις κατασκευές ακόμη ευκολότερες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστικά σχεδιαστικά πακέτα, τα οποία να έχουν όλες τις αναγκαίες εντολές και τα κατάλληλα εργαλεία για να κατασκευάσουν ένα φράκταλ από το μηδέν, όπως είναι το Geometer's Sketchpad και το Cabri Geometry ([3], [8]).

Τα γεωμετρικά αυτά λογισμικά έχουν τη δυνατότητα να δημιουργούν τις βασικές γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και να εκτελούν τους βασικούς μετασχηματισμούς μεταφορά-ανάκλαση-περιστροφή-αυξομείωση, έτσι ώστε και οι πιο πολύπλοκες κατασκευές να επιτυγχάνονται εύκολα και γρήγορα. Επί πλέον με το εργαλείο «αρχείο εντολών» είναι δυνατή η περιγραφική εγγραφή γεωμετρικών κατασκευών αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων και στη συνέχεια η χρησιμοποίησή του (εκτέλεση του αρχείου εντολών) κατ' επανάληψη, για τη δημιουργία σχημάτων κατά τη διάρκεια της σχεδίασης. Τα αρχεία εντολών, για παράδειγμα, στο Sketchpad είναι δυνατόν να ορισθούν και να εγγραφούν με άπειρη αναδρομή. Κατά την εκ νέου εκτέλεσή τους δίνουμε μια συνθήκη περάτωσης, ώστε να προσδιορίσουμε το βάθος της αναδρομής: πόσες, δηλαδή, «εικόνες μέσα σε εικόνες» θα κατασκευάσουμε προτού σταματήσουμε. Για το λόγο αυτό ακριβώς το Sketchpad γίνεται ένα ισχυρό εργαλείο για την κατασκευή των αυτο-όμοιων φράκταλς.

Σ' αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε κάποιες ιδέες και υποδείξεις για τη δημιουργία ορισμένων απλών φράκταλς με χρήση των δυνατοτήτων του Geometer's Sketchpad. Οι ιδέες αυτές είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν ως βάση για την ανάθεση projects και συνθετικών δημιουργικών εργασιών στα πλαίσια της διδασκαλίας του μαθήματος της γεωμετρίας στο Γυμνάσιο ή το Λύκειο, αναλόγως βέβαια του επιπέδου δυσκολίας και του βάθους της παρουσίασης κάθε φορά. Είναι επίσης δυνατόν να χρησιμεύσουν και ως υλικό για εξοικείωση και παραπέρα αναζήτηση στους καθηγητές μαθηματικών, οι οποίοι παρακολουθούν προγράμματα επιμόρφωσης στη χρήση γεωμετρικού λογισμικού και στην κατάλληλη αξιοποίηση του στη διδακτική πράξη [10]. Τα παραδείγματα είναι κλιμακούμενης δυσκολίας και σε ορισμένα παραθέτουμε τις μετρήσεις που μας δίνει το λογισμικό για τον υπολογισμό της περιμέτρου ή του εμβαδού των σχημάτων ως αφετηρία για την πιο αυστηρή-αναλυτική μελέτη τους, ανάλογα, βέβαια, και με το υπόβαθρο των μαθητών κάθε φορά.

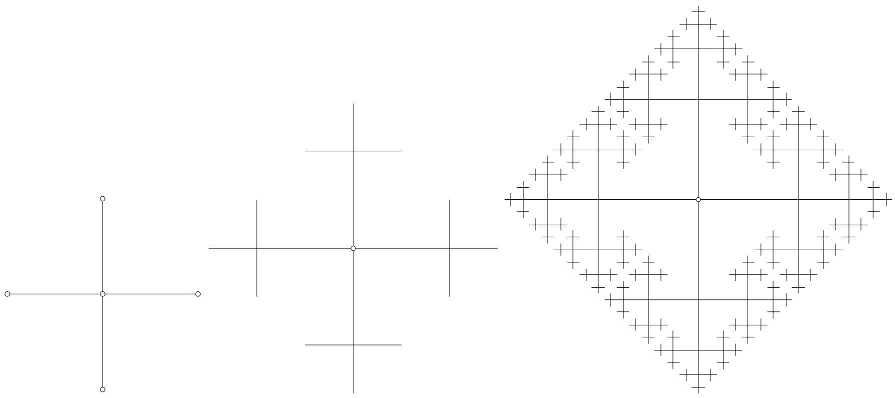
Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τις βασικές λειτουργίες και τα κατασκευαστικά εργαλεία του λογισμικού αυτού. Σε διαφορετική περίπτωση, 3-4 ώρες εξοικείωσης είναι, πιστεύουμε, αρκετές για να αισθάνεται κάποιος άνετα με το χειρισμό των βασικών εργαλείων. Από εκεί και πέρα, η λειτουργία και εκτέλεση ενός αρχείου εντολών, καθώς επίσης και η διαδικασία αναδρομής στο Sketchpad για την κατασκευή ενός απλού φράκταλ και συγκεκριμένα της καμπύλης του Koch, περιγράφεται βήμα προς βήμα στον οδηγό χρήσης της Ελληνικής έκδοσης(3) για windows (σελ.135-149) [8]. Λόγω περιορισμένου χώρου, το αρχείο εντολών για την κατασκευή καθενός από τα φράκταλς που παρουσιάζουμε σ' αυτό το άρθρο μπορεί ο ενδιαφερόμενος να το αναζητήσει στις προσωπικές μας ιστοσελίδες ([13],[14]).

Παραδείγματα απλών φράκταλς

1. *Το προσθετικό φράκταλ*

Το φράκταλ αυτό αρχίζει από το προσθετικό σύμβολο $+$ και αναπτύσσεται προσθέτοντας στα τέσσερα άκρα, του δύο οριζόντια τμήματα εκατέρωθεν του αρχικού τμήματος και ένα στην προέκταση του ίσα με το

1/4 του αρχικού. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε αναδρομικά την ίδια διαδικασία όσες φορές επιθυμούμε (σχήμα 1)



Σχήμα 1

Αναδρομή	Αρχή	1η	2η	3η	4η
Περίμετρος	2	5	9,5	16,25	63,375

Από τον πίνακα μετρήσεων φαίνεται ότι καθώς οι επαναλήψεις συνεχίζονται στο άπειρο, η περίμετρος του φράκταλ τείνει κι αυτή στο άπειρο. Πράγματι:
Εάν θεωρήσουμε 1 το μήκος καθενός από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα (οριζόντιο και κατακόρυφο) που αποτελούν το +, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που προστίθεται θα έχουν μήκος $4\cdot 3\cdot \frac{1}{4}=3$ και επομένως η περίμετρος του σχήματος της πρώτης αναδρομής θα είναι Π_1 = 2+3=5. Ομοίως η περίμετρος του σχήματος της $2^{\eta\varsigma}$ αναδρομής θα είναι Π_2= $2+4\cdot\frac{3}{2^2}+4\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{1}{8}=2+4\cdot\frac{3}{2^2}+4\cdot\frac{3^2}{2^3}=9,5$. Της $3^{\eta\varsigma}$ αναδρομής θα είναι $\Pi_3 = 2+4\cdot\frac{3}{2^2}+4\cdot\frac{3^2}{2^3}+4\cdot\frac{3^3}{2^4}$ και γενικά η περίμετρος του σχήματος της $\nu^{\eta\varsigma}$ αναδρομής θα είναι $\Pi_\nu = 2+4\cdot\frac{3}{2^2}+4\cdot\frac{3^2}{2^3}+4\cdot\frac{3^3}{2^4}+..........+4\cdot\frac{3^\nu}{2^{\nu+1}} =$

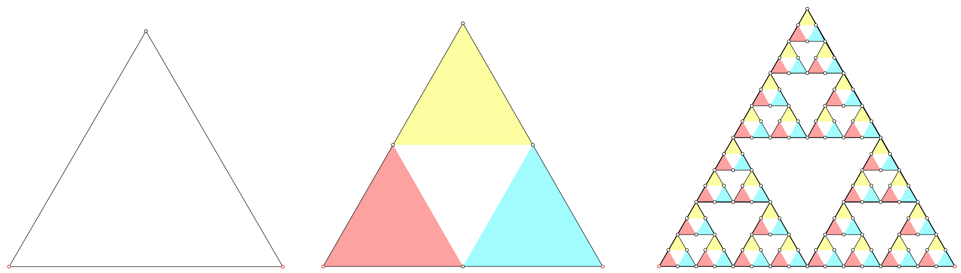
$$2+\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{3}+\dots\dots\dots+\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1}\right]=$$

$$2+3\left[1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+\dots+\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1}\right]=2+6\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}-1\right]\to+\infty$$

Παραλλαγή: Σε κάθε ένα από τα άκρα του αρχικού $+$ να προσθέσουμε ένα $+$ με μέγεθος το μισό του αρχικού.

2. *Το πλέγμα του Sierpinski*

Αρχίζουμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Βρίσκουμε τα μέσα των πλευρών και χρωματίζουμε τα τρία γωνιακά τρίγωνα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται σε κάθε ένα από τα τρία χρωματιστά τρίγωνα. Δηλαδή, κάθε φορά αφαιρούμε το μεσαίο τρίγωνο (σχήμα 2).



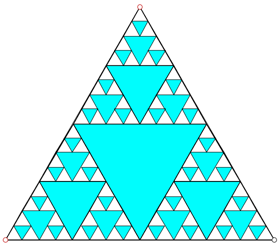
Αρχή 1^{η} αναδρομή 4^{η} αναδρομή

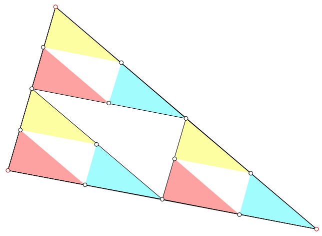
Σχήμα 2

Αναδρομή	Αρχή	1η	2η	3η	4η	5η
Εμβαδό	256	192	144	108	81	60,75

Παρατηρούμε ότι σε κάθε στάδιο αφαιρείται το 1/3 του αρχικού τριγώνου και παραμένουν τα $\frac{3}{4}$. Στην 2^{η} αναδρομή παραμένουν τα $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$, στη 3^{η} τα $\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$ και στη ν-οστή τα $\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}$. Έτσι, μετά από άπειρες επαναλήψεις θα βρούμε ότι η επιφάνεια του φράκταλ θα εξαφανιστεί, αφού $\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}=0$.

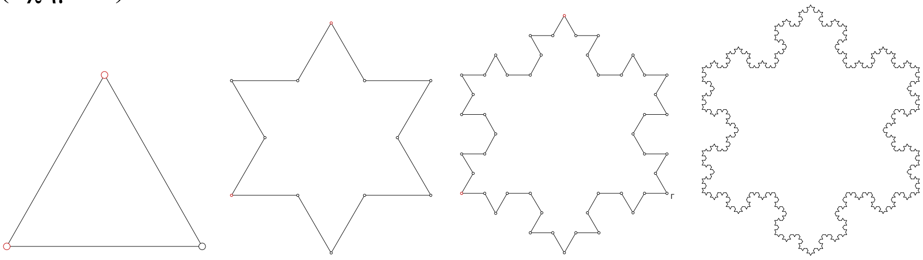
Παραλλαγές: 1. Να χρωματίσουμε το μεσαίο τρίγωνο.
2. Το τρίγωνο να μην είναι ισόπλευρο
3. Εφαρμογή σε τετράγωνο





3. Η νιφάδα του Koch.

Η νιφάδα αυτή δημιουργείται εάν κατασκευάσουμε την καμπύλη του Koch πάνω στις πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Η καμπύλη δημιουργήθηκε το 1904 από τον Helge von Koch. Η κατασκευή της ξεκινά από ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο διαιρούμε σε τρία ίσα μέρη και αντικαθιστούμε το μεσαίο κομμάτι με τις δύο πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές είναι ίσες με το μεσαίο τμήμα που αφαιρέσαμε. Στη συνέχεια η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται σε κάθε ένα από τα τέσσερα τμήματα της τεθλασμένης γραμμής που σχηματίσθηκε (σχήμα 3).



Αρχή 1^{η} αναδρομή 2^{η} αναδρομή 4^{η} αναδρομή

Σχήμα 3

Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό τρίγωνο έχει πλευρά 1, τότε:

Στην αρχή θα έχουμε περίμετρο $\Pi_0 = 3$. Στην 1^{η} αναδρομή θα έχουμε 3 φορές από 4 τμήματα μήκους $\frac{1}{3}$, δηλ $\Pi_1 = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{3} = 4$. Στην 2^{η} αναδρομή θα έχουμε 3 φορές από 16 τμήματα μήκους $\frac{1}{9}$, δηλ $\Pi_2 = 3\cdot 16\cdot\frac{1}{9} = 5+\frac{1}{3}$. Γενικά, στην ν-οστή αναδρομή θα έχουμε 3 φορές από 4^{ν} τμήματα μήκους $\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}$, άρα η $\Pi\nu = 3\cdot 4^{\nu}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu} = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\nu} \to \infty$

Για το εμβαδόν: Στην αρχή το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου είναι $E_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Στην 1^{η} αναδρομή προστίθενται 3 τρίγωνα πλευράς $\frac{1}{3}$, άρα προστίθεται εμβαδόν $E_1 = \frac{3\sqrt{3}}{3^2\cdot 4}$. Στην 2^{η} αναδρομή προστίθενται 12 τρίγωνα πλευράς $\frac{1}{9}$, άρα προστίθεται εμβαδόν $E_2 = \frac{3\cdot 4\cdot\sqrt{3}}{3^4\cdot 4}$. Στην 3^{η} αναδρομή προστίθενται 48 τρίγωνα πλευράς $\frac{1}{27}$, άρα προστίθεται εμβαδόν $E_3 = \frac{3\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}}{3^6\cdot 4}$. Γενικά στην ν-0στή αναδρομή προστίθεται εμβαδόν $E_{\nu} = \frac{3\cdot 4^{\nu-1}\cdot\sqrt{3}}{3^{2\nu}\cdot 4}$, άρα το ολικό εμβαδόν θα είναι $E_{o\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{3^2\cdot 4}+\frac{3\cdot 4\cdot\sqrt{3}}{3^4\cdot 4}+\frac{3\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}}{3^6\cdot 4}+....+\frac{3\cdot 4^{\nu-1}\cdot\sqrt{3}}{3^{2\nu}\cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4\cdot 3^2}\cdot\left[1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+...+\left(\frac{4}{9}\right)^{\nu-1}\right]$ (I).

Από την παραπάνω σχέση η αγκύλη γίνεται $1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+....+\left(\frac{4}{9}\right)^{\nu-1} = 1+\frac{4}{9}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+....+\left(\frac{4}{9}\right)^{\nu-2}\right) =$

$1+\frac{4}{9}\cdot\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{\nu-1}}{1-\frac{4}{9}}\right] = 1+\frac{4}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{\nu-1}\right]$ (II). Έτσι τελικά από τις (I) και (II) προκύπτει ότι $E_{ολ} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left[\frac{9}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{\nu - 1} \right]$ και από εδώ

$$\lim_{\nu \to \infty} E_{ολ} = \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left[\frac{9}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{\nu-1} \right] \right\} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Αναδρομή	Αρχή	1η	$2^{η}$	$3^{η}$	$4^{η}$	$25^{η}$
Περίμετρος	3	4	5,33333…	7,1111…	9,481481….	3986,481
Εμβαδό	0,433012702	0,577350269	0,641500299	0,670011424	0,682683034	0,692820323

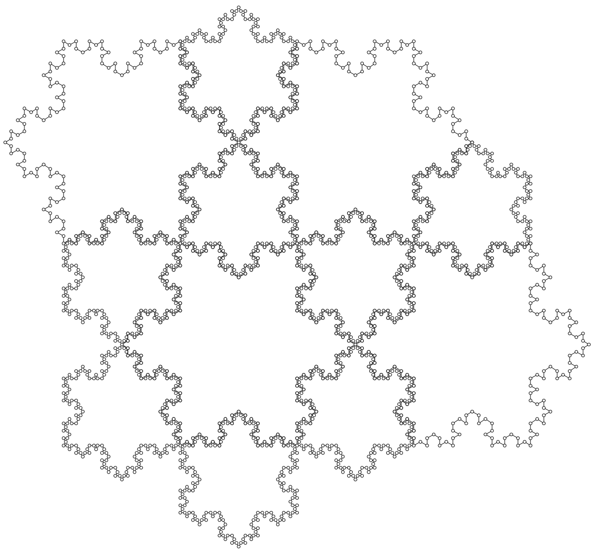
<u>Παραλλαγές:</u> 1. Διαιρούμε το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα σε τρία ίσα μέρη και αντικαθιστούμε το μεσαίο τμήμα με τις τρεις πλευρές ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά είναι ίση με το μεσαίο τμήμα που αφαιρέσαμε.

2. Αντί του ισοπλεύρου τριγώνου, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στις πλευρές ενός οποιουδήποτε κανονικού πολυγώνου.

<u>Πλακόστρωση με νιφάδες του Koch.</u>

Λόγω της ομορφιάς που παρουσιάζουν οι εικόνες των φράκταλς, χρησιμοποιούνται πολύ συχνά ως ψηφιδωτά για να καλύψουν το επίπεδο.

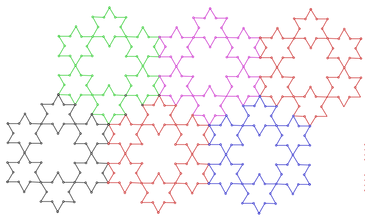
Εντυπωσιακές εικόνες φράκταλς συναντάμε πάνω στο πάτωμα, σε πλέγματα παραθύρων ή σε χαλιά.

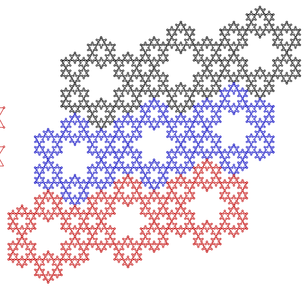


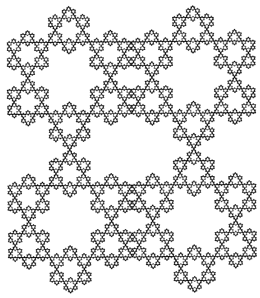
Σχήμα 4

Ένα πολύ ωραίο σχέδιο για ψηφιδωτό είναι και η νιφάδα του Koch σε λόγο εμβαδών 1:3. Για πλακοστρώσεις τέτοιου είδους θεωρούμε τη νιφάδα σαν ένα κανονικό εξάγωνο και στη συνέχεια καλύπτουμε το επίπεδο με το εξάγωνο κατά διάφορους τρόπους (σχήμα 4).

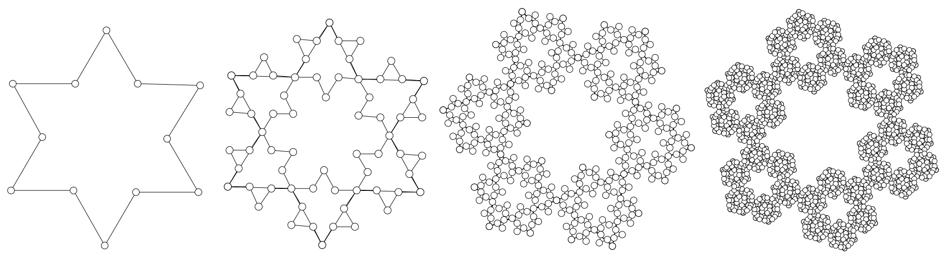
Ακολουθώντας τον ίδιο κανόνα, αλλά ξεκινώντας από ένα αστέρι του Koch, το οποίο θεωρούμε πάλι σαν ένα εξάγωνο, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια άλλη εντυπωσιακή κάλυψη (σχήματα 5 και 6). Το είδος αυτού του ψηφιδωτού το βρίσκουμε συνήθως στα αρχαία Κινέζικα τζάμια παραθύρων (σχήμα 7).


Σχήμα 5


Σχήμα 6


Σχήμα 7

Για να δημιουργήσουμε το αστέρι του Koch ξεκινάμε από ένα εξάγραμμο, δηλαδή το σχήμα που προκύπτει στην πρώτη αναδρομή της διαδικασίας κατασκευής της νιφάδας του Koch. Σε κάθε κορυφή δημιουργούμε κάθε φορά νέα μικρότερα εξάγραμμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.

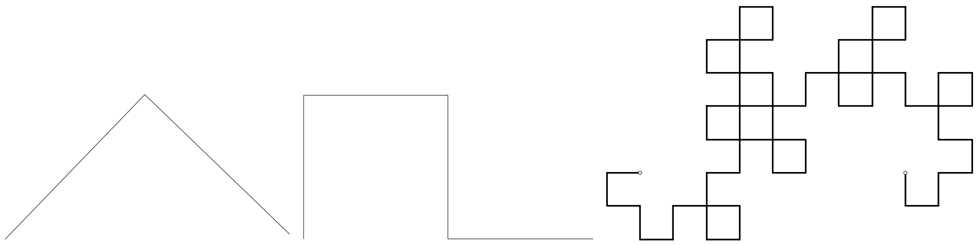


Αρχή　　1η αναδρομή　　2η αναδρομή　　3η αναδρομή

Σχήμα 8

4. *Ο δράκος*

Το φράκταλ αυτό εμφανίζεται σ' όλο και ανώτερα στάδια στην αρχή κάθε κεφαλαίου του μυθιστορήματος του Michael Creighton "Jurassic Park". Ξεκινάμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο στη συνέχεια αφαιρούμε και το αντικαθιστούμε με τις πλευρές ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το τμήμα αυτό. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται πάνω σε κάθε μια από τις δύο ίσες πλευρές του ορθογωνίου (σχήμα 9).



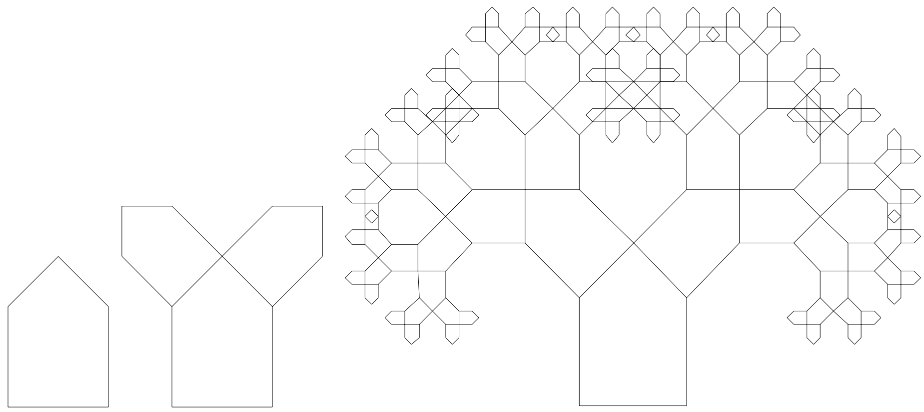
Αρχή 1η αναδρομή 5η αναδρομή

Σχήμα 9

<u>Παραλλαγές</u>: 1. Από δεξιά προς τα αριστερά.
2. Η κορυφή της ορθής γωνίας από κάτω.

5. *Το μπρόκολο*

Το φράκταλ αυτό ονομάσθηκε έτσι λόγω της ομοιότητας του με το γνωστό μας λαχανικό, το μπρόκολο. Το αρχικό σχήμα με το οποίο ξεκινάμε είναι ένα πεντάγωνο που μοιάζει με το σκελετό ενός σπιτιού του οποίου η βάση είναι τετράγωνο και η οροφή ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με την πλευρά του τετραγώνου. Στη συνέχεια, η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε ένα τμήμα της οροφής (σχήμα 10).



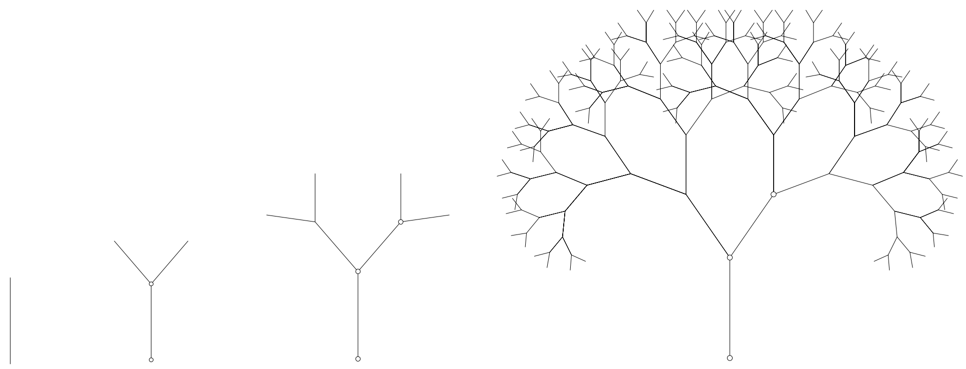
Αρχή 1η αναδρομή 6η αναδρομή

Σχήμα 10

<u>Παραλλαγές</u>: 1. Η οροφή είναι ένα 30^o-60^o-90^o τρίγωνο.
2. Χρωματίζουμε τα διάφορα μέρη του αρχικού πενταγώνου.

6. *Το δυαδικό δέντρο.*

Το φράκταλ αυτό αρχίζει με ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που εκπροσωπεί τον κύριο κορμό ενός δέντρου. Από την κορυφή του κορμού ξεκινούν δύο ευθύγραμμα τμήματα (κλάδοι) του ίδιου μήκους, έτσι ώστε να σχηματίζουν ίδια γωνία με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται στα άκρα καθενός κλάδου έτσι ώστε να διατηρούνται οι αναλογίες $\frac{\text{πρώτο κλαδί}}{\text{κορμό}}$ για τα κλαδιά και οι γωνίες επίσης να είναι ίσες. (σχήμα 11).



Αρχή $1^{η}$ αναδρομή $2^{η}$ αναδρομή $7^{η}$ αναδρομή

Σχήμα 11

Παραλλαγές: 1. Ο λόγος λ του μήκους των δύο νέων κλαδιών προς τα προηγούμενα κλαδιά δεν είναι σταθερός λ=1 αλλά λ=μ/ν, όπου $μ,ν \in \mathbb{N}^*$ με μ<ν.
2. Οι γωνίες που σχηματίζει κάθε νέος κλάδος με τον προηγούμενό του δεν είναι ίσες (π.χ η μία 140^o και η άλλη 170^o).
3. Από κάθε κορυφή κλάδου ξεκινούν τρεις νέοι κλάδοι.

Τελικές παρατηρήσεις

Στην εργασία αυτή προσπαθήσαμε να αναδείξουμε κάποια στοιχεία από τη γεωμετρία των φράκταλς για παιδαγωγικούς σκοπούς. Χρησιμοποιήσαμε το γεωμετρικό λογισμικό Geometer's Sketchpad για να δημιουργήσουμε μερικές εικόνες απλών φράκταλς ως παραδείγματα για εξοικείωση με το αντικείμενο και βαθύτερο στόχο τον παραπέρα προβληματισμό και αναζήτηση. Η γεωμετρία των φράκταλς αποτελεί ένα ζωντανό, σύγχρονο και πολλά υποσχόμενο κλάδο των μαθηματικών με εφαρμογές σε πλήθος φυσικών φαινομένων και καταστάσεων. Ακόμη και τώρα νέες εντυπωσιακές εικόνες φράκταλς γεννιόνται από μαθηματικούς σε όλο τον κόσμο και καταβάλλονται προσπάθειες να μελετηθούν νέες πλευρές των φράκταλς, έτσι ώστε στο μέλλον να γίνει καλύτερη χρήση αυτών σε όλα τα πεδία εφαρμογής τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] **Barnsley,M.**: *Fractals Everywhere,* San Diego, Academic Press, Inc.,1988.

[2] **Briggs,J. και David Peat,F.**: *Ο ταραγμένος καθρέφτης,* Αθήνα, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 1996.

[3] **Cabri Geometry**, Texas Instruments, Dallas,Texas, 1994 (Ελληνική έκδοση: Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε., 2001).

[4] **Feder,J.**: *Fractals*, New York, Plenum Press,1988.

[5] **Mandelbrot, B.**: *Fractals and an Art for the Sake of Science*, In *The Visual mind*, ed. By Michele Emmer, Cambridge, MIT Press, 1993. [6] **Peitgen,P. and Pichter,H.**: *The beauty of fractals*, Berlin, Springer-Verlag, 1986

[7] **Stewart I.**: *Does God play Dice? The Mathematics of Chaos*, New York, Basil Blackwell, 1989.

[8] **The Geometer's Sketchpad**, Key Curriculum Press, Berkeley, California,1995 (Ελληνική έκδοση: Καστανιώτης, Αθήνα, 2000).

[9] **Τουμάσης Μπ. και Αρβανίτης Τ.**: *Μαθηματικά και τέχνη: Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμικού.* Πρακτικά 19^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ,2001.

[10] **Τουμάσης Μπ. και Αρβανίτης Τ.**: *Διδασκαλία μαθηματικών με χρήση Η/Υ*, Αθήνα, Εκδόσεις Σαββάλας, 2003

[11] **http://spanky.triumf.ca/www/fractal-info**

[12] **www.wolframscience.com/reference/notes/934a**

[13] **http://users.sch.gr/anarvaniti**

[14] **http://users.sch.gr/toumasis**

ABSTRACT

In this paper we first discuss some characteristics of fractals and describe, in very simple terms, some of their properties. Afterwards we offer some ideas and suggestions for the construction and study of several types of simple fractals using several Sketchpad commands such as script, and transformations. All these ideas can be used to help students as well as in-service teachers to create and explore their own figures using the Geometer's Sketchpad.