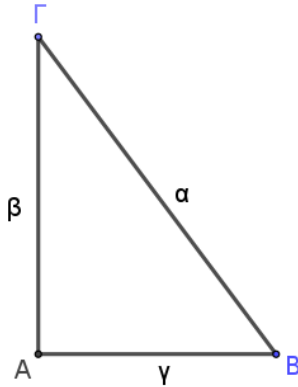


Ασκήσεις στα διανύσματα

Να αποδείξετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος χρησιμοποιώντας μεθόδους από τα διανύσματα.



Πιο αναλυτικά, έχουμε ένα τρίγωνο για το οποίο ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

Με ποιο τρόπο χρησιμοποιώντας διανύσματα, μπορούμε αρχικά να μετασχηματίσουμε την ισότητα (1) «με όρους διανυσμάτων» και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή;

Από την (1), έχουμε ισοδύναμα:

$$(1) \Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 + |\vec{A\Gamma}|^2 = |\vec{B\Gamma}|^2 \quad (2)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι: $|\vec{B\Gamma}|^2 = \vec{B\Gamma}^2$ (3) και κοιτάζοντας το σχήμα, μπορούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα

$\vec{B\Gamma}$ ως το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{BA}$ και $\vec{A\Gamma}$.

$$\text{Επομένως έχουμε: } \vec{B\Gamma}^2 = (\vec{BA} + \vec{A\Gamma})^2 = (\vec{BA} + \vec{A\Gamma}) \cdot (\vec{BA} + \vec{A\Gamma}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vec{B\Gamma}^2 = |\vec{BA}|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} + |\vec{A\Gamma}|^2 \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις ισότητες (2), (3), (4) συμπεραίνουμε ότι: $|\vec{AB}|^2 + |\vec{A\Gamma}|^2 = |\vec{BA}|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} + |\vec{A\Gamma}|^2$

και από την τελευταία ότι: $\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$.

Αυτό όμως σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα (*), με άλλα λόγια ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

(*). Όταν $\vec{BA} \perp \vec{A\Gamma}$ ισχύει και για το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{BA}$ ότι είναι κάθετο στο $\vec{A\Gamma}$.

Δηλαδή ότι: $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$. Το γράψαμε έτσι για να έχουν τα δύο τελευταία διανύσματα κοινή αρχή το A και να φαίνεται πιο καλά ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με κορυφή της ορθής γωνίας το σημείο A.

1. Μία άλλη πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που μπορούμε να αποδείξουμε με τη βοήθεια των διανυσμάτων, διατυπώνεται στην άσκηση 7 Β' Ομάδας σελίδα 49.

Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Να αποδείξετε ότι:

- (i) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.
- (ii) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{v} = |\vec{b}| \vec{a} - |\vec{a}| \vec{b}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Λύση της άσκησης 3 Β' ομάδας σελίδα 48

Έχουμε $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικά) και θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

- (i) ο φορέας του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και,
- (ii) ο φορέας του διανύσματος $\vec{v} = |\vec{b}| \vec{a} - |\vec{a}| \vec{b}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Αν $\hat{\omega} = (\vec{a}, \vec{b})$, $\hat{\varphi}_1 = (\vec{u}, \vec{a})$, $\hat{\varphi}_2 = (\vec{u}, \vec{b})$

- (i) αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sin \hat{\varphi}_1 = \sin \hat{\varphi}_2$ (γιατί;)

$$\text{Έχουμε: } \sin \hat{\varphi}_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{u}|} \Rightarrow \sin \hat{\varphi}_1 = \frac{|\vec{a}| \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{u}|} \quad (1)$$

Η ισοότητα (1) μπορεί να εκφραστεί και, $\sin \hat{\varphi}_1 = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{u}|} (\cos \hat{\omega}) \quad (2)$ (γιατί;)

$$\text{Επίσης } \sin \hat{\varphi}_2 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{u}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{u}|} \Rightarrow \sin \hat{\varphi}_2 = \frac{|\vec{b}| \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}| \cdot |\vec{u}|} \quad (3)$$

$$\text{Όμοια η (3) μπορεί να γραφεί και, } \sin \hat{\varphi}_2 = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{u}|} (1 + \cos \hat{\omega}) \quad (4)$$

Από τις ισοότητες (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \sin \hat{\varphi}_1 = \sin \hat{\varphi}_2 \Rightarrow \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$

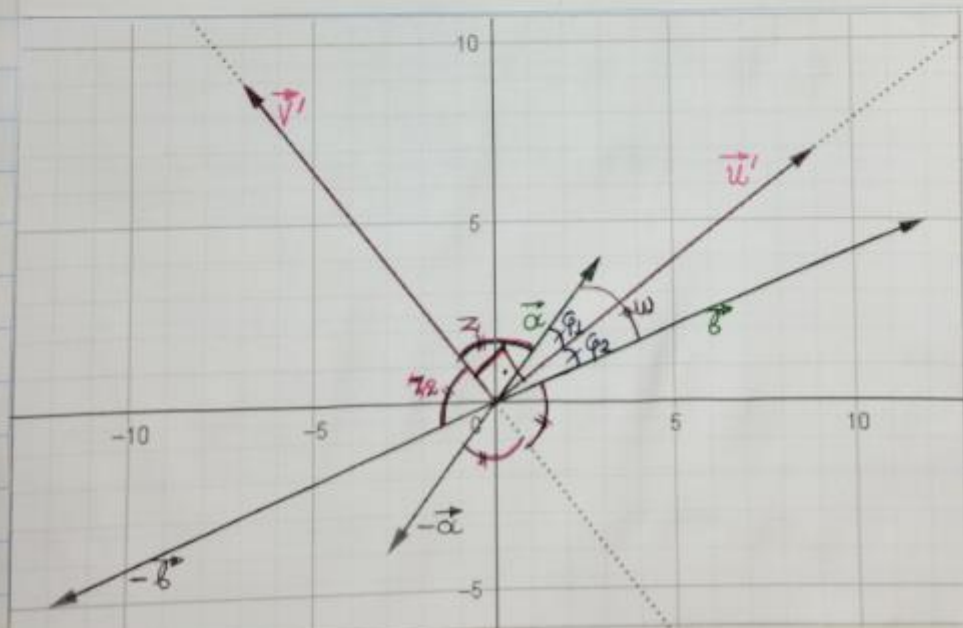
- (ii) Αποδεικνύουμε ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$, οπότε, ο φορέας του $\vec{v}$ διχοτομεί την παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ ή, ότι ο φορέας του $\vec{v}$ διχοτομεί τη γωνία $(\vec{a}, -\vec{b})$ ή την κατακορυφήν της $(-\vec{a}, \vec{b})$.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα στην επόμενη σελίδα, όπου με το παραπάνω σχήμα αναδεικνύονται περαιτέρω τα παραπάνω συμπεράσματα.

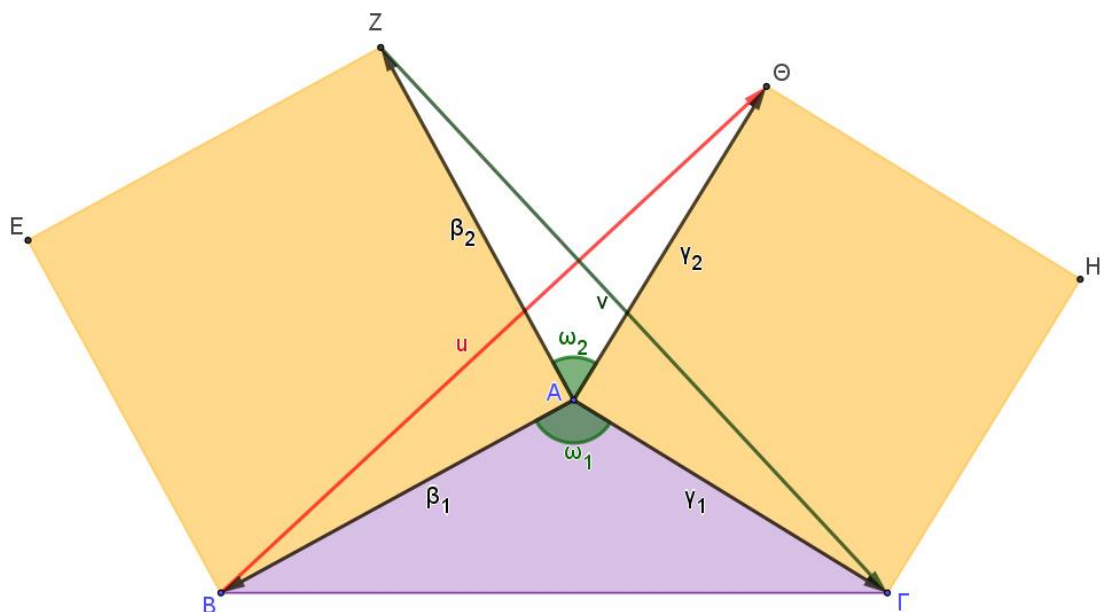
Εφαρμογή για την άσκηση 3

- Για τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (12, 5)$, να βρείς:
- (i) τα μέτρα τους και (ii) να τα παραστήσει γραφικά.
 - (iii) να αποδείξεις ότι για το διάνυσμα $\vec{u} = |\vec{b}| \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot |\vec{a}| = \dots = (99, 77)$ ή για το παράλληλο με αυτό $\vec{u}' = (9, 7)$ (γιατί;), ο κοινός τους φορέας διχοτομεί τη γωνία $\hat{\omega} = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.
 - (iv) το διάνυσμα: $\vec{v} = |\vec{b}| \cdot \vec{a} - |\vec{a}| \cdot \vec{b} = \dots = (-21, 27)$ ή ότι το παράλληλο με αυτό $\vec{v}' = (-7, 9)$ βρίσκονται στην ευθεία που διχοτομεί την $\pi - \omega$.

Υπόδειξη: Αν παραστήσει σωστά τα διανύσματα που δίνονται, αυτά που θα υπολογίσεις, καθώς και τις διευθύνσεις των διχοτόμων της ω και $\pi - \omega$, η κατασκευή μας θα πρέπει να μοιάζει με το παρακάτω σχήμα:

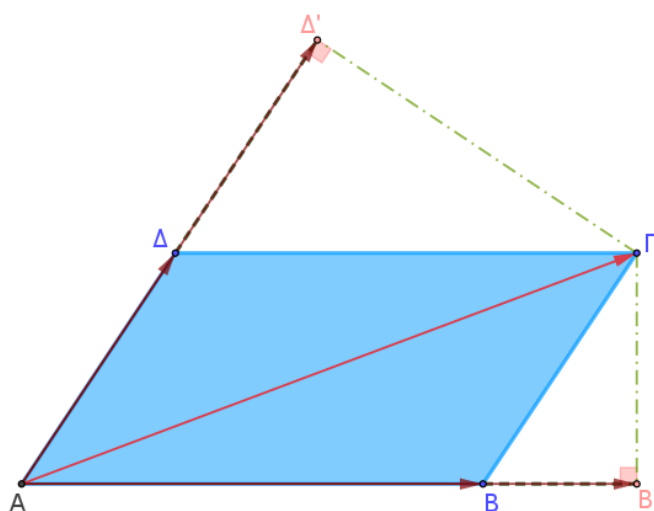


4. Άσκηση 9 σελίδα 50



Απάντηση: ...Τα ζητούμενα διανύσματα $\vec{B\Theta}, \vec{\Gamma Z}$ είναι ,..., κάθετα και ένα σημείο «κλειδί» για να αποδείξουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο ίσο με 0, είναι ότι οι γωνίες $\omega_1, \omega_2, \dots$, είναι παραπληρωματικές.

5. Άσκηση 10 σελίδα 50



Υπόδειξη: Πως εκφράζονται τα διανύσματα $\vec{A\Delta'}, \vec{AB'}$, ως συνάρτηση του διανύσματος της διαγωνίου κι' ενός κάθετου σε αυτά αντίστοιχα. Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις εκφράσεις στο 1^ο μέλος της προς απόδειξη σχέσης, θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα. Με αυτό τον τρόπο δεν χρησιμοποιούμε την

6. Άσκηση 11 σελίδα 50

